אנליזה מתמטית

תוכן העניינים

אנליזה מתמטית

פרק 1 - קווים ותחומים במישור, משטחים וגופים במרחב

תוכן העניינים

קווים ותחומים במישור

שאלות

1) שרטטו במישור את התחומים הבאים:

א. $S=\{(x,y)\,|\,-1\le x\le 1,\ -1\le y\le 4\}$

ב. $S=\{(x,y)\,|\,-1\le x^2\le 1,\ -1\le y\le 4\}$

ג. $S=\{(x,y)\,|\,x\le y\le 4\}$

2) שרטטו במישור את התחומים הבאים:

א. $S=\{(x,y)\,|\,x-1\le y\le 2x+1\}$

ב. $S=\{(x,y)\,|\,|y-2x|\le 1\}$

ג. $S=\{(x,y)\,|\,|x|+y<4\}$

ד. $S=\{(x,y)\,|\,(x+y)^2\le 4\ ,\ x>1\}$

3) מצאו את המרכז והרדיוס של המעגלים הבאים:

א. $x^2+y^2-2x-3=0$

ב. $x^2+y^2-8y=-15$

ג. $x^2+y^2+2x+4y=0$

4) בכל אחד מהסעיפים הבאים חלק ממעגל. שרטטו אותו.

א. $y=\sqrt{1-x^2}$

ב. $y=-\sqrt{1-x^2}$

ג. $x=\sqrt{1-y^2}$

ד. $x=-\sqrt{1-y^2}$

ה. $y=\sqrt{1-x^2}$ $\quad 0\le x\le 1$

ו. $y=\sqrt{1-x^2}$ $\quad -\frac{3}{5}\le x\le \frac{3}{5}$

5) בכל אחד מהסעיפים הבאים חלק ממעגל. שרטטו אותו.

א. $y=2+\sqrt{1-(x-3)^2}$

ב. $y=2-\sqrt{-x^2+6x-8}$

ג. $x\geq 3.5,\quad x=4-\sqrt{1-y^2}$

6) שרטטו את התחומים הבאים במישור:

א. $S=\left\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leq 4\right\}$

ב. $S=\left\{(x,y)\,|\,x^2+y^2<4\right\}$

ג. $S=\left\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\geq 4\right\}$

ד. $S=\left\{(x,y)\,|\,x^2+y^2>4\right\}$

ה. $S=\left\{(x,y)\,|\,-\sqrt{4-x^2}\leq y\leq\sqrt{4-x^2}\right\}$

ו. $S=\left\{(x,y)\,|\,-\sqrt{4-y^2}\leq x\leq\sqrt{4-y^2}\right\}$

ז. $S=\left\{(x,y)\,|\,0\leq y\leq\sqrt{4-x^2}\right\}$

ח. $S=\left\{(x,y)\,|\,-\sqrt{4-y^2}\leq x\leq 0\right\}$

7) שרטטו את התחומים הבאים במישור:

א. $S=\left\{(x,y)\,|\,1\leq x^2+y^2\leq 4\right\}$

ב. $S=\left\{(x,y)\,|\,1\leq x^2+y^2\leq 4,\ x\geq 0, y\geq 0\right\}$

ג. $S=\left\{(x,y)\,|\,1\leq x^2+y^2\leq 4,\ x\geq 0\right\}$

ד. $S=\left\{(x,y)\,|\,1\leq x^2+y^2\leq 4,\ \ y\geq 0\right\}$

8) שרטטו את התחומים הבאים במישור:

א. $S=\left\{(x,y)\,|\,x^2+y^2-2x+4y+1\leq 0\right\}$

ב. $S=\left\{(x,y)\,|\,0\leq y+1\leq\sqrt{1-x^2}\right\}$

9) שרטטו את התחומים הבאים במישור:

א. $S=\{(x,y)\,|\,1\le x^2+y^2\le 4,\ \ x\le y\le 2x\}$

ב. $S=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 4,\ y\ge x\}$

ג. $S=\left\{(x,y)\,|\,\frac{1}{7}x+\frac{25}{7}\le y\le\sqrt{25-x^2}\right\}$

ד. $S=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 4,\ y\ge x^2\}$

ה. $S=\left\{(x,y)\,|\,x^2\le y\le\sqrt{4-x^2}\right\}$

ו. $S=\left\{(x,y)\,|\,|x-1|\le y\le\sqrt{1-(x-1)^2}\right\}$

10) נתונה המשוואה $25x^2+4y^2-50x+16y=59$.

א. הוכיחו שהמשוואה מתארת אליפסה ושרטטו אותה.

ב. רשמו את הפונקציות שמתארות את החצי העליון ואת החצי התחתון של האליפסה.

ג. רשמו את הפונקציות שמתארות את החצי הימני ואת החצי השמאלי של האליפסה.

ד. מהי קבוצת כל הנקודות במישור, החסומה בתוך האליפסה או עליה?

ה. מהי קבוצת כל הנקודות במישור, החסומה בתוך האליפסה ומעל לציר המשני שלה?

11) שרטטו את התחומים הבאים במישור:

א. $S=\{(x,y)\,|\,4x^2+y^2+8x-4y+4\ge 0\}$

ב. $S=\left\{(x,y)\,|\,0\le y\le\frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}\right\}$

ג. $S=\left\{(x,y)\,|\,\frac{1}{2}y+1\le x\le\frac{3}{2}\sqrt{4-y^2}\right\}$

ד. $S=\left\{(x,y)\,|\,-\frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}\le y\le -x^2\right\}$

12) שרטטו את התחומים הבאים במישור:

א. $S=\left\{(x,y)\,|\,x^2\le y\le 2-x^2\right\}$

ב. $S=\left\{(x,y)\,|\,-2\le y\le -x^2\right\}$

ג. $S=\left\{(x,y)\,|\,y^2-2\le x\le -y^2\right\}$

ד. $S=\left\{(x,y)\,|\,y^2\le x\le 1-y\right\}$

13) שרטטו את התחומים הבאים במישור:

א. $\left\{(x,y)\left|\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}\le 1\right.\right\}$

ב. $\left\{(x,y)\left|\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}\ge 1,\ \ x^2+y^2\le 16\right.\right\}$

ג. $\left\{(x,y)\left|\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}\ge 1,\ \ y\ge\frac{1}{4}x^2\right.\right\}$

ד. $\left\{(x,y)\left|\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}\le 1,\ \ x^2+y^2\ge 4\right.\right\}$

תשובות סופיות

לפתרונות מלאים ושרטוטים היכנסו לאתר GooL.co.il

קווים ותחומים במישור בהצגה פרמטרית

שאלות

1) עברו מן ההצגה הפרמטרית הנתונה, להצגה קרטזית:

א. $x=t^2+1,\quad y=t^2$ $\qquad t\geq 0$

ב. $x=\sin t,\quad y=\cos^2 t$ $\qquad 0\leq t\leq \pi$

ג. $x=\cos t,\quad y=4\sin t$ $\qquad \pi\leq t\leq 2\pi$

2) להלן תיאור פרמטרי של מסלולים במישור.
על ידי חילוץ של הפרמטר t, מצאו משוואה מתאימה שמבטאת כל מסלול באמצעות המשתנים x ו- y בלבד:

א. $x=t-4\quad ,y=t^2$

ב. $x=-4+\cos t\quad ,\ y=1+2\sin t$

ג. $x=4\cos^3 t\quad ,\ y=4\sin^3 t$

ד. $x=t(t+1)+1\quad ,y=t(0.5t+1)+1$

ה. $x=\dfrac{20t}{4+t^2}\quad ,\ y=\dfrac{20-5t^2}{4+t^2}$

ו. $x=ke^t+ke^{-t}\quad ,\ y=ke^t-ke^{-t}$ (k קבוע).

3) נתון המעגל $x^2+y^2=8$.

א. שרטטו את המעגל ומצאו את משוואתו הפרמטרית.

ב. מצאו הצגה פרמטרית של חלק המעגל מהנקודה $\mathrm{A}(2,2)$ לנקודה $\mathrm{B}(-2,-2)$.

ג. מצאו הצגה פרמטרית של התחום D , המוגבל מעל הישר AB ומתחת למעגל.

ד. מצאו הצגה פרמטרית של התחום E , המוגבל בין המעגל הנתון למעגל $x^2+y^2=16$.

4) נתונים שני מעגלים $(x-8)^2+(y-4)^2=25$ ו- $x^2+y^2=25$.

א. שרטטו את המעגלים, מצאו את משוואותיהם הפרמטריות ומצאו הצגה פרמטרית לתחום הכלוא בכל אחד מהמעגלים.

ב. המעגלים נחתכים בשתי נקודות, A ו- B, ותהי הנקודה A בעלת ערך ה- y הגדול יותר.
מצאו את ההצגה הפרמטרית של חלק המעגל בין A לבין B.
הפרידו לשני מקרים.

ג. מצאו הצגה אלגברית לתחום החסום בין שני המעגלים.

5) נתונות משוואות של שתי אליפסות: $\begin{cases} \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1 \\ \frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{4}=1 \end{cases}$.

א. שרטטו את האליפסות ומצאו את הצגתן הפרמטרית.

ב. האליפסות נחתכות ב-4 נקודות, מצאו אותן.

ג. הקו המחבר את 4 הנקודות לעיל מורכב מ-4 מסילות.
מצאו את ההצגה הפרמטרית של כל אחת מהמסילות.

ד. מצאו הצגה פרמטרית של התחום, המוגבל בתוך שתי האליפסות.

6) נתונה היפרבולה $4x^2-y^2=4$.

א. ההיפרבולה מורכבת משתי מסילות.
מצאו את ההצגה האלגברית ואת ההצגה הפרמטרית של כל אחת מהמסילות.

ב. הציגו באופן פרמטרי את התחום המוגבל בין ההיפרבולה לבין האסימפטוטות שלה.

7) נתונה המשוואה $3x^2-y^2=3$.

א. איזה קו במישור מתארת המשוואה? שרטטו.

ב. הקו מסעיף א' מורכב משתי מסילות.
מצאו את ההצגה האלגברית ואת ההצגה הפרמטרית של כל אחת מהמסילות.

ג. המסילה C היא חלק של הקו הנתון מהנקודה $A(-2,-3)$ לנקודה $B(-1,0)$.
כתבו את C בצורה פרמטרית.

ד. מצאו את המרחק הקצר ביותר בין ציר ה- y למסילה C.

8) חשבו את אורך העקום $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$ $0 \le t \le 2\pi$.

9) חשבו את אורך העקום $\begin{cases} x = 4\sin t \\ y = 10t \\ z = 4\cos t \end{cases}$ $-\pi \le t \le 2\pi$.

תשובות סופיות

1) א. $y=x-1,\ x\ge 1$ ב. $y=1-x^2, -1\le x\le 1$

ג. $x^2+\frac{y^2}{16}=1\ ,\ -1\le x\le 1, y\le 0$

2) א. $y=(x+4)^2$ ב. $(x+4)^2+\left(\frac{y-1}{2}\right)^2=1$ ג. $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=4^{\frac{2}{3}}$

ד. $x^2-4xy+4y^2=2y-1$ ה. $x^2+y^2=25$ ו. $x^2-y^2=4k^2$

3) א. $\begin{cases}x(t)=\sqrt{8}\cos t\\ y(t)=\sqrt{8}\sin t\end{cases}\ 0\le t\le 2\pi$ ב. $\begin{cases}x(t)=\sqrt{8}\cos t\\ y(t)=\sqrt{8}\sin t\end{cases}\ \frac{\pi}{4}\le t\le \frac{5\pi}{4}$

ג. $\begin{cases}x(u,v)=\sqrt{8}u\cos v\\ y(u,v)=\sqrt{8}u\sin v\end{cases}\ 0\le u\le 1,\ \frac{\pi}{4}\le v\le \frac{5\pi}{4}$

ד. $\begin{cases}x(u,v)=u\cos v\\ y(u,v)=u\sin v\end{cases}\ \sqrt{8}\le u\le 4,\ 0\le v\le 2\pi$

4) א. המעגל $x^2+y^2=25$: מרכז: $(0,0)$. רדיוס: 5.

הצגה פרמטרית של המעגל: $\begin{cases}x(t)=5\cos t\\ y(t)=5\sin t\end{cases}\ 0\le t\le 2\pi$

הצגה פרמטרית של העיגול: $\begin{cases}x(u,v)=5u\cos v\\ y(u,v)=5u\sin v\end{cases}\ 0\le u\le 1,\ 0\le v\le 2\pi$.

המעגל $(x-8)^2+(y-4)^2=25$: מרכז: $(8,4)$. רדיוס: 5.

הצגה פרמטרית של המעגל: $\begin{cases}x(t)=8+5\cos t\\ y(t)=4+5\sin t\end{cases}\ 0\le t\le 2\pi$.

הצגה פרמטרית של העיגול: $\begin{cases}x(u,v)=8+5u\cos v\\ y(u,v)=4+5u\sin v\end{cases}\ 0\le u\le 1,\ 0\le v\le 2\pi$.

ב. מקרה 1: $0\le t\le \arctan\left(\frac{4}{3}\right),\ \begin{cases}x(t)=5\cos t\\ y(t)=5\sin t\end{cases}$,

מקרה 2 - $\pi\le t\le \arctan\left(\frac{4}{3}\right)+\pi\ ,\ \begin{cases}x=8+5\cos t\\ y=4+5\sin t\end{cases}$.

ג. $\left\{(x,y)\mid -\sqrt{25-(y-4)^2}+8\le x\le \sqrt{25-y^2}\right\}$

5) א. $\begin{cases}x(t)=2\cos t,\ \ y(t)=\sqrt{2}\sin t\quad 0\le t\le 2\pi\\ x(t)=\sqrt{2}\cos t,\ \ y(t)=2\sin t\quad 0\le t\le 2\pi\end{cases}$

ב. $A\left(\frac{2}{\sqrt{3}},\frac{2}{\sqrt{3}}\right),B\left(-\frac{2}{\sqrt{3}},\frac{2}{\sqrt{3}}\right),C\left(-\frac{2}{\sqrt{3}},-\frac{2}{\sqrt{3}}\right),D\left(\frac{2}{\sqrt{3}},-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$

ג. המסילה DA: $\arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\le t\le\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ $\begin{cases}x(t)=\sqrt{2}\cos t\\ y(t)=2\sin t\end{cases}$.

המסילה BC : $\arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\pi\le t\le\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\pi$ $\begin{cases}x(t)=\sqrt{2}\cos t\\ y(t)=2\sin t\end{cases}$.

המסילה AB : $\arctan\left(\sqrt{2}\right)\le t\le\arctan\left(-\sqrt{2}\right)+\pi$ $\begin{cases}x(t)=2\cos t\\ y(t)=\sqrt{2}\sin t\end{cases}$.

המסילה CD : $\arctan\left(\sqrt{2}\right)+\pi\le t\le\arctan\left(-\sqrt{2}\right)+2\pi$ $\begin{cases}x(t)=2\cos t\\ y(t)=\sqrt{2}\sin t\end{cases}$.

$$D=D_1\cup D_2\cup D_3\cup D_4$$

$$D_1:\begin{cases}x(u,v)=\sqrt{2}\mathbf{u}\cos v\\ y(u,v)=2\mathbf{u}\sin v\end{cases}$$

$$0\le\mathbf{u}\le1,\ \arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\le v\le\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$D_3:\begin{cases}x(u,v)=\sqrt{2}\mathbf{u}\cos v\\ y(u,v)=2\mathbf{u}\sin v\end{cases}$$

$$0\le\mathbf{u}\le1,\ \arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\pi\le v\le\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\pi$$

$$D_2:\begin{cases}x(u,v)=2\mathbf{u}\cos v\\ y(u,v)=\sqrt{2}\mathbf{u}\sin v\end{cases}$$

$$0\le\mathbf{u}\le1,\ \arctan\left(\sqrt{2}\right)\le v\le\arctan\left(-\sqrt{2}\right)+\pi$$

ד.

$$D_4:\begin{cases}x(u,v)=2\mathbf{u}\cos v\\ y(u,v)=\sqrt{2}\mathbf{u}\sin v\end{cases}$$

$$0\le\mathbf{u}\le1,\ \arctan\left(\sqrt{2}\right)+\pi\le v\le\arctan\left(-\sqrt{2}\right)+2\pi$$

6) א. אלגברית: ימנית $x=\sqrt{1+\frac{y^2}{4}}$, שמאלית $x=-\sqrt{1+\frac{y^2}{4}}$.

פרמטרית: ימנית $t\in\mathbb{R}$ $\begin{cases} x=\cosh t \\ y=2\sinh t \end{cases}$, שמאלית: $t\in\mathbb{R}$ $\begin{cases} x=-\cosh t \\ y=2\sinh t \end{cases}$.

$$D=D_1\cup D_2$$

ב. $0\le u\le 1,\ v\in\mathbb{R}$ $\quad D_1:\begin{cases} x(u,v)=u\cosh v \\ y(u,v)=2u\sinh v \end{cases}$

$0\le u\le 1\ \ v\in\mathbb{R}$ $\quad D_2:\begin{cases} x(u,v)=-u\cosh v \\ y(u,v)=2u\sinh v \end{cases}$

7) א. היפרבולה. ב. אלגברית: ימנית $x=\sqrt{1+\frac{y^2}{3}}$, שמאלית $x=-\sqrt{1+\frac{y^2}{3}}$.

פרמטרית: ענף ימני $t\in\mathbb{R}$ $\begin{cases} x=\cosh t \\ y=\sqrt{3}\sinh t \end{cases}$ וענף שמאלי $t\in\mathbb{R}$ $\begin{cases} x=-\cosh t \\ y=\sqrt{3}\sinh t \end{cases}$.

ג. $\ln(2-\sqrt{3})\le t\le 0$ $\quad C:\begin{cases} x=-\cosh t \\ y=\sqrt{3}\sinh t \end{cases}$ $\qquad$ ד. 1

8) 8

9) $6\pi\sqrt{29}$

קווים ותחומים במישור בהצגה קוטבית (פולרית)

שאלות

1) ענו על הסעיפים הבאים:

א. המירו את הנקודה הקוטבית $\left(4,\frac{\pi}{3}\right)$ לנקודה קרטזית.

ב. המירו את הנקודה הקרטזית $(-1,-1)$ לנקודה קוטבית.

2) ענו על הסעיפים הבאים:

א. המירו את הנקודה הקוטבית $\left(10,-\frac{\pi}{3}\right)$ לנקודה קרטזית.

ב. המירו את הנקודה הקרטזית $(0,-4)$ לנקודה קוטבית.

ג. המירו את הנקודה הקרטזית $(-2,2)$ לנקודה קוטבית.

3) ענו על הסעיפים הבאים:

א. המירו את המשוואה $4x-x^2=1+xy$ לקואורדינטות קוטביות.

ב. המירו את המשוואה $r=-4\cos\theta$ לקואורדינטות קרטזיות.

4) ענו על הסעיפים הבאים:

א. המירו את המשוואה $x^2+y^2=4y$ לקואורדינטות פולריות.

ב. המירו את המשוואה $x=10$ לקואורדינטות פולריות.

ג. המירו את המשוואה $y=4$ לקואורדינטות פולריות.

5) ענו על הסעיפים הבאים:

א. המירו את המשוואה $r=4$ לקואורדינטות קרטזיות.

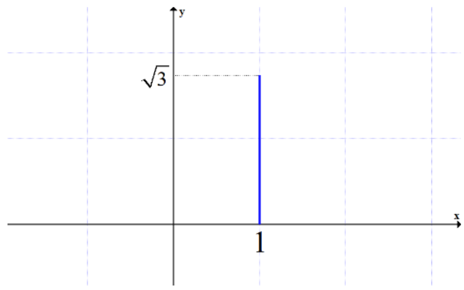
ב. המירו את המשוואה $\theta=\pi/4$ לקואורדינטות קרטזיות.

ג. המירו את המשוואה $r=2\cos\theta+4\sin\theta$ לקואורדינטות קרטזיות.

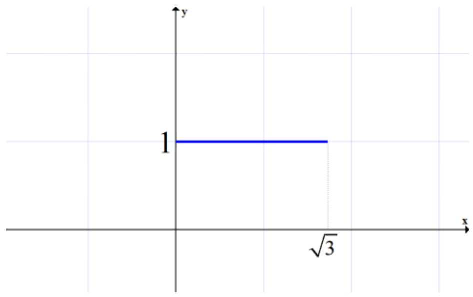
ד. המירו את המשוואה $6r^3\sin\theta=4-\cos\theta$ לקואורדינטות קרטזיות.

6) להלן שני איורים, שבכל אחד מהם קו.
כתבו כל אחד מהקווים בהצגה פולרית.

איור א



איור ב



7) בכל אחד מהסעיפים הבאים חלק ממעגל.
כתבו אותו בהצגה פולרית.

א. $y=\sqrt{1-x^2}$

ב. $y=-\sqrt{1-x^2}$

ג. $x=\sqrt{1-y^2}$

ד. $x=-\sqrt{1-y^2}$

ה. $y=\sqrt{1-x^2},\ 0\le x\le 1$

ו. $y=\sqrt{1-x^2},\ -\frac{3}{5}\le x\le \frac{3}{5}$

8) בסעיפים א-ג הוכיחו שכל אחד מהקווים מתאר חלק ממעגל.
שרטטו את הקו והציגו אותו בצורה פולרית (קוטבית).

א. $y=\sqrt{4-(x-2)^2}$

ב. $x=-\sqrt{6y-y^2}$

ג. $y=-1+\sqrt{1-x^2}$

ד. סגרו את הקו מסעיף ג' על ידי ישר מתאים.
מהי הצגתו הפולרית של ישר זה?

9) שרטטו את התחומים הבאים במישור והציגו אותם בהצגה פולרית:

א. $S=\left\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 4\right\}$

ב. $S=\left\{(x,y)\,|\,0\le y\le\sqrt{4-x^2}\right\}$

ג. $S=\left\{(x,y)\,|\,-\sqrt{4-y^2}\le x\le 0\right\}$

10) שרטטו את התחומים הבאים במישור והציגו אותם בהצגה פולרית:

א. $S=\{(x,y)\,|\,1\le x^2+y^2\le 4\}$

ב. $S=\{(x,y)\,|\,1\le x^2+y^2\le 4,\ x\ge 0, y\ge 0\}$

ג. $S=\{(x,y)\,|\,1\le x^2+y^2\le 4,\ x\ge 0\}$

ד. $S=\{(x,y)\,|\,1\le x^2+y^2\le 4,\ \ y\ge 0\}$

11) שרטטו את התחומים הבאים במישור והציגו אותם בהצגה פולרית:

א. $S=\{(x,y)\,|\,1\le x^2+y^2\le 4,\ \ x\le y\le 2x\}$

ב. $S=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 4,\ y\ge x\}$

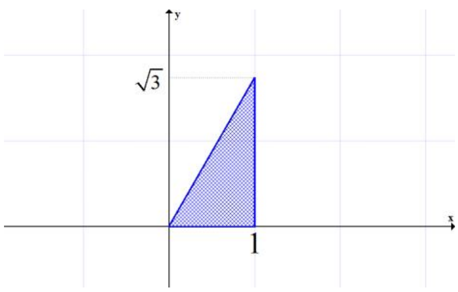
12) הציגו את התחום הבא בצורה פולרית: $S=\left\{(x,y)\,|\,\frac{1}{7}x+\frac{25}{7}\le y\le\sqrt{25-x^2}\right\}$.

13) הציגו את התחום הבא בצורה פולרית: $S=\left\{(x,y)\,|\,\frac{1}{\sqrt{3}}x\le y\le\sqrt{8x-x^2}\right\}$.

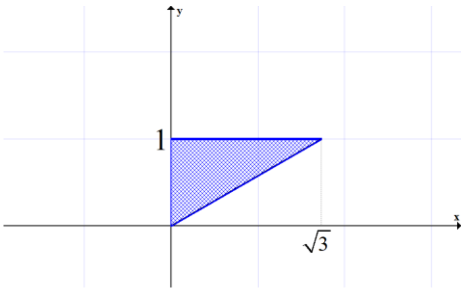
14) להלן שני איורים, ובכל איור תחום.

כתבו כל אחד מהתחומים בהצגה פולרית ותארו במילים כל אחד מהתחומים.

איור א



איור ב



תשובות סופיות

1) א. $(x,y)=\left(2,2\sqrt{3}\right)$ ב. $(r,\theta)=\left(\sqrt{2},\frac{5\pi}{4}\right)$

2) א. $(x,y)=\left(5,-5\sqrt{3}\right)$ ב. $(r,\theta)=\left(4,\frac{3\pi}{2}\right)$ ג. $(r,\theta)=\left(\sqrt{8},\frac{3\pi}{4}\right)$

3) א. $4r\cos\theta-r^2\cos^2\theta=1+r\cos\theta\cdot r\sin\theta$ ב. $(x+2)^2+y^2=2^2$

4) א. $r=4\sin\theta$ ב. $r\cos\theta=10$ ג. $r\sin\theta=4$

5) א. $x^2+y^2=4^2$ ב. $y=x$ ג. $(x-1)^2+(y-2)^2=5$

ד. $6\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3\cdot y=4\sqrt{x^2+y^2}-x$

6) א. $r=\frac{1}{\cos\theta}\quad 0\le\theta\le\frac{\pi}{3}$ ב. $r=\frac{1}{\sin\theta}\quad \frac{\pi}{6}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$

7) א. $\begin{cases}r=1\\0\le\theta\le\pi\end{cases}$ ב. $\begin{cases}r=1\\\pi\le\theta\le2\pi\end{cases}$ ג. $\begin{cases}r=1\\-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}\end{cases}$

ד. $\begin{cases}r=1\\\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{3\pi}{2}\end{cases}$ ה. $\begin{cases}r=1\\0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\end{cases}$ ו. $\begin{cases}r=1\\\arctan\frac{4}{3}\le\theta\le\arctan\left(-\frac{4}{3}\right)+\pi\end{cases}$

8) א. $r=4\cos\theta,\ 0\le\theta\le0.5\pi$ ב. $r=6\sin\theta,\ 0.5\pi\le\theta\le\pi$

ג. $\begin{cases}r=-2\sin\theta\\\pi\le\theta\le1.25\pi\ or\ 1.75\pi\le\theta\le2\pi\end{cases}$ ד. $r=-\frac{1}{\sin\theta},\ 1.25\pi\le\theta\le1.75\pi$

9) א. $\begin{cases}0\le r\le2\\0\le\theta\le2\pi\end{cases}$ ב. $\begin{cases}0\le r\le2\\0\le\theta\le\pi\end{cases}$ ג. $\begin{cases}0\le r\le2\\0.5\pi\le\theta\le1.5\pi\end{cases}$

10) א. $\begin{cases}1\le r\le2\\0\le\theta\le2\pi\end{cases}$ ב. $\begin{cases}1\le r\le2\\0\le\theta\le0.5\pi\end{cases}$ ג. $\begin{cases}1\le r\le2\\-0.5\pi\le\theta\le0.5\pi\end{cases}$ or $\begin{cases}1\le r\le2\\1.5\pi\le\theta\le2.5\pi\end{cases}$

ד. $\begin{cases}1\le r\le2\\0\le\theta\le\pi\end{cases}$

11) א. $\begin{matrix}1\le r\le2\\0.25\pi\le\theta\le\arctan2\end{matrix}$ ב. $0\le r\le2,\ 0.25\pi\le\theta\le1.25\pi$

12) $\begin{matrix}\frac{25}{7\sin\theta-\cos\theta}\le r\le5\\\arctan\frac{4}{3}\le\theta\le\arctan\left(-\frac{3}{4}\right)+\pi\end{matrix}$

13) $0 \le r \le 8\cos\theta,\ \frac{\pi}{6} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$

14) א. $0 \le \theta \le \frac{\pi}{3} \quad 0 \le r \le \frac{1}{\cos\theta}$ ב. $\frac{\pi}{6} \le \theta \le \frac{\pi}{2} \quad 0 \le r \le \frac{1}{\sin\theta}$

משטחים במרחב

שאלות

זהו ושרטטו את המשטחים בשאלות **1-3**:

1) $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{25}=1$

2) $z=5x^2+1.25y^2$

3) $20x^2+45y^2=180+36z^2$

4) זהו ושרטטו את המשטחים הבאים:

א. $z=4x^2+y^2+1$

ב. $z=3-x^2-y^2$

5) זהו כל אחד מהמשטחים הבאים:

א. $25x^2+100y^2+4z^2=100$

ב. $25x^2+4y^2-50x-16y-100z+41=0$

ג. $x^2+4y^2-4z^2+80z-404=0$

6) מצאו את החיתוך בין המשטח $x^2+y^2+z^2=169$ לבין המשטח $z=12$.
הסבירו את התוצאה מבחינה גרפית.

7) נתון המשטח $2x^2+2y^2+2z^2-16x-4y+40z+206=0$.

א. זהו את המשטח.

ב. מצאו את נקודות החיתוך של המשטח עם הישר $\frac{x-5}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z+14}{2}$.

8) מצאו את החיתוך בין המשטחים $x^2+y^2+(z-10)^2=24$ ו- $x^2+y^2+z^2=64$.
הסבירו את התוצאה מבחינה גרפית.

9) נתון המשטח $36z^2+4x^2-9y^2=36$.

א. זהו את המשטח ושרטט אותו.

ב. רשמו הצגה פרמטרית של שני ישרים שאינם נמצאים באותו מישור, ושנמצאים כולם על המשטח.

10) נתונים שני משטחים: $R:\ x^2-y^2+2z^2=3,\ \ Q: 2x^2-y^2+z^2=3$.

א. זהו את המשטחים ושרטטו אותם.

ב. הראו כי החיתוך בין R ו- Q הוא שתי מסילות, כל אחת נמצאת במישור, וכתבו את משוואת המישורים הללו.

ג. המסילה C היא חלק של החיתוך בין R ל- Q. נתון כי $A(-2,-3,2)$ היא נקודת התחלה של C ו- $B(-1,0,1)$ היא נקודת סיום של C.
כתבו את C בצורה פרמטרית.

ד. מצאו את המרחק הקצר ביותר בין ציר ה- y למסילה C.

- **בסוף קובץ זה תמצאו סיכום של כל המשטחים הנפוצים.**

תשובות סופיות

1) אליפסואיד.

2) פרבולואיד אליפטי הנפתח כלפי מעלה.

3) היפרבולואיד חד יריעתי.

4) א. פרבולואיד אליפטי שמרכזו בנקודה $(0,0,1)$ ונפתח כלפי מעלה.

ב. פרבולואיד אליפטי שמרכזו בנקודה $(0,0,3)$ ונפתח כלפי מטה.

5) א. אליפסואיד.

ב. פרבולואיד אליפטי שמרכזו בנקודה $(1,2,0)$ ונפתח כלפי מעלה.

ג. היפרבולואיד חד-יריעתי שמרכזו בנקודה $(0,0,10)$.

6) החיתוך הוא מעגל $x^2+y^2=25$, שמרכזו בנקודה $(0,0,12)$.

7) א. ספירה שמרכזה $(4,1,-10)$ ורדיוסה $\sqrt{14}$.

נקודות החיתוך הן $A(7,0,-12),\ B\left(\frac{59}{9},-\frac{2}{9},-\frac{112}{9}\right)$.

8) החיתוך הוא המעגל $x^2+y^2=15$, שמרכזו בנקודה $(0,0,7)$.

9) א. היפרבולואיד חד-יריעתי שמרכזו על ציר ה- y.

ב. $\ell_1:(x,y,z)=(3t,2t,1)\quad \ell_2:\ (x,y,z)=(3,2t,t)$

10) א. שני המשטחים הם היפרבולואיד חד-יריעתי. ב. $z=-x, z=x$

ג. $\ln(2-\sqrt{3})\le t\le 0\quad C:\ x=-\cosh t,\ y=\sqrt{3}\sinh t,\ z=\cosh t$ ד. $\sqrt{2}$

גופים במרחב

שאלות

1) שרטטו את התחומים הבאים במרחב ותארו במילים את הגוף שהתקבל.

א. $V=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2\le 4\}$

ב. $V=\left\{(x,y,z)\,|\,-\sqrt{4-x^2-y^2}\le z\le\sqrt{4-x^2-y^2}\right\}$

ג. $V=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2\le 4\ ,\ z\ge 0\}$

ד. $V=\left\{(x,y,z)\,|\,0\le z\le\sqrt{4-x^2-y^2}\right\}$

ה. $V=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2\le 4\ ,\ z\le 0\}$

ו. $V=\left\{(x,y,z)\,|\,-\sqrt{4-x^2-y^2}\le z\le 0\right\}$

ז. $V=\{(x,y,z)\,|\,0\le x\le 2,\ 0\le y\le 4,\ 0\le z\le 3\}$

2) שרטטו את התחומים הבאים במרחב ותארו במילים את הגוף שהתקבל.

א. $V=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2\le 1,\ x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0\}$

ב. $V=\left\{(x,y,z)\,|\,0\le z\le\sqrt{1-x^2-y^2},\ x\ge 0, y\ge 0\right\}$

ג. $D=\{(x,y,z)\,|\,1\le x^2+y^2+z^2\le 4,\ \ x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0\}$

ד. $D=\{(x,y,z)\,|\,1\le x^2+y^2+z^2\le 4,\ \ x\ge 0, z\ge 0,\ 0\le y\le x\}$

ה. $V=\left\{(x,y,z)\,|\ 1\le z\le 1+\sqrt{1-x^2-y^2}\right\}$

ו. $V=\left\{(x,y,z)\,|\ \sqrt{x^2+y^2}\le z\le\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-x^2-y^2}\right\}$

3) שרטטו את התחומים הבאים במרחב ותארו במילים את הגוף שהתקבל.

א. $V=\left\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2\le 4\ ,\ z\ge\sqrt{3(x^2+y^2)}\right\}$

ב. $V=\left\{(x,y,z)\,|\,\sqrt{3(x^2+y^2)}\le z\le\sqrt{4-x^2-y^2}\right\}$

ג. $V=\left\{(x,y,z)\,|\,0\le z\le\sqrt{4-x^2-y^2}\ ,\ x^2+y^2\le 1\right\}$

ד. $V=\{(x,y,z)\,|\,0\le y\le 3,\ x\ge 0,\ z\ge 0,\ x^2+z^2\le 4\}$

ה. $V=\left\{(x,y,z)\,|\,x\ge 0, y\ge 0,\ z\ge 0,\ x^2+y^2+z^2\le 36,\ \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}\le 1\right\}$

4) שרטטו את התחומים הבאים במרחב ותארו במילים את הגוף שהתקבל.

א. $V=\left\{(x,y,z)\,|\,\sqrt{x^2+y^2}\le z\le 2-x^2-y^2\right\}$

ב. $V=\left\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2\le z\le \sqrt{4-x^2-y^2}\right\}$

ג. $V=\left\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2\le z\le 1-x^2-y^2\right\}$

ד. $V=\left\{(x,y,z)\,|\,0\le z\le 4-x^2-y^2,\ \ x^2+y^2-2x\le 0\right\}$

5) שרטטו את התחומים הבאים במרחב ותארו במילים את הגוף שהתקבל.

א. $\left\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2\le 4,\ \ x^2+y^2\le 1\right\}$

ב. $\left\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z\le 4,\ \ x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0, x^2+y^2\le 1\right\}$

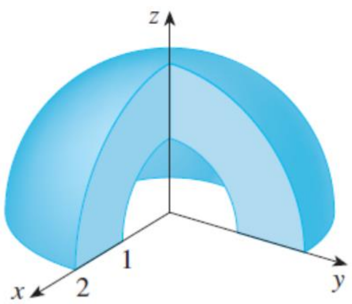
ג. $V=\left\{(x,y,z)\,|\,0\le z\le 4-x^2-y^2,\ x\ge 0, y\ge 0,\ x^2+y^2\le 1\right\}$

ד. $V=\left\{(x,y,z)\,|\,\sqrt{x^2+y^2}\le z\le \sqrt{4-x^2-y^2},\ x^2+y^2\le 1\right\}$

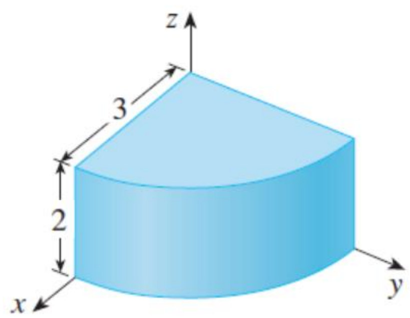
ה. $U=\left\{(x,y,z)\,|\,0\le z\le 10-y,\ \ 1\le x^2+y^2\le 4\right\}$

6) בכל אחד מהסעיפים הבאים איור של גוף V במרחב.
תארו במילים את הגוף וכתבו אותו לפי התבנית $V=\{(x,y,z)\,|\,...\}$.

א.



ב.



7) נתונים המשטחים $z=x^2+y^2$ ו- $z=2-\sqrt{x^2+y^2}$.

א. זהו כל אחד מהמשטחים בשם.

ב. שרטטו את התחום החסום בין המשטחים.

ג. מצאו את משוואת עקום החיתוך בין המשטחים.

8) נתונים שני משטחים: $z=x^2+y^2+z^2$ ו- $z=\sqrt{x^2+y^2}$.

א. זהו כל אחד מהמשטחים בשם.

ב. שרטטו את התחום החסום בין המשטחים וכתוב אותו בתבנית $V=\{(x,y,z)\mid\ ?\le z\le ??\}$.

ג. מצאו את משוואת עקום החיתוך בין המשטחים.

9) תחומים תלת-ממדיים M ו- N נתונים על ידי $\begin{matrix} M:\ x^2-y^2+2z^2\le 3 \\ N: 2x^2-y^2+z^2\le 3 \end{matrix}$.
תחום תלת-ממדי W הוא החיתוך בין M ל- N.
שרטטו את D, החיתוך של W עם המישור $y=1$ (במערכת צירים xz),
וכתבו את D בהצגה פרמטרית.

לפתרונות מלאים ראו את הסרטונים באתר GooL.co.il

קואורדינטות גליליות וכדוריות

שאלות

1) בכל אחד מהסעיפים הבאים נתונה משוואה של משטח במערכת קרטזית.
מצאו את המשוואה של המשטח במערכת גלילית ובמערכת כדורית.
מהו שמו של המשטח? שרטטו את המשטח.

א. $z=3$

ב. $z=4x^2+4y^2$

ג. $x^2+y^2=4$

2) בכל אחד מהסעיפים הבאים נתונה משוואה של משטח במערכת קרטזית.
מצאו את המשוואה של המשטח במערכת גלילית ובמערכת כדורית.
מהו שמו של המשטח? שרטטו את המשטח.

א. $x^2+y^2+z^2=9$

ב. $2x+3y+4z=1$

ג. $x^2=16-z^2$

ד. $z=\sqrt{x^2+y^2}$

3) בכל אחד מהסעיפים הבאים נתונה משוואה של משטח במערכת גלילית.
הציגו את המשוואה במערכת קרטזית. מהו שם המשטח? ציירו את המשטח.

א. $r=3$

ב. $z=r^2$

ג. $z=r$

ד. $\theta=\frac{\pi}{4}$

ה. $r=4\sin\theta$

ו. $r^2\cos 2\theta=z$

4) בכל אחד מהסעיפים הבאים נתונה משוואה של משטח במערכת כדורית.
הציגו את המשוואה במערכת קרטזית. מהו שם המשטח?

א. $r=3$

ב. $\theta=\frac{\pi}{3}$

ג. $\phi=\frac{\pi}{4}$

ד. $r=2\sec\phi$

ה. $r=4\cos\phi$

5) בכל אחד מהסעיפים הבאים נתונה משוואה של משטח במערכת כדורית.
הציגו את המשוואה במערכת קרטזית. מהו שם המשטח? שרטטו את המשטח.

א. $r\sin\phi=1$

ב. $r\sin\phi=2\cos\theta$

ג. $r-2\sin\phi\cos\theta=0$

6) בכל אחד מהסעיפים הבאים גוף במרחב.
תארו אותו במילים, שרטטו אותו, וכתבו אותו בקואורדינטות גליליות.

א. $V=\left\{(x,y,z)\,|\,\sqrt{x^2+y^2}\le z\le 2-x^2-y^2\right\}$

ב. $V=\left\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2\le z\le\sqrt{6-x^2-y^2}\right\}$

7) בכל אחד מהסעיפים הבאים גוף במרחב.
תארו אותו במילים, שרטטו אותו, וכתבו אותו בקואורדינטות גליליות.

א. $V=\left\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2\le z\le 1-x^2-y^2\right\}$

ב. $V=\left\{(x,y,z)\,|\,0\le z\le 4-x^2-y^2,\ \ x^2+y^2-2x\le 0\right\}$

8) בכל אחד מהסעיפים הבאים גוף במרחב.
תארו אותו במילים, שרטטו אותו, וכתבו אותו בקואורדינטות גליליות.

א. $V=\left\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2\le 4,\ \ x^2+y^2\le 1\right\}$

ב. $V=\left\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z\le 4,\ \ x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0, x^2+y^2\le 1\right\}$

ג. $V=\left\{(x,y,z)\,|\,\sqrt{x^2+y^2}\le z\le\sqrt{4-x^2-y^2},\ x^2+y^2\le 1\right\}$

ד. $U=\left\{(x,y,z)\,|\,0\le z\le 10-y,\ \ 1\le x^2+y^2\le 4\right\}$

תשובות סופיות

1) א. מערכת גלילית: $z=3$. מערכת כדורית: $r=\frac{3}{\cos\phi}$. שם המשטח: מישור.

ב. מערכת גלילית: $z=4r^2$. מערכת כדורית: $r=\frac{\cos\phi}{4\sin^2\phi}$.

שם המשטח: פרבולואיד.

ג. מערכת גלילית: $r=2$. מערכת כדורית: $r=\frac{2}{\sin\phi}$. שם המשטח: גליל.

2) א. מערכת גלילית: $r^2+z^2=9$. מערכת כדורית: $r=3$. שם המשטח: ספירה.

ב. מערכת גלילית: $r(2\cos\theta+3\sin\theta)+4z=1$.

מערכת כדורית: $r(2\cos\theta\sin\phi+3\sin\theta\sin\phi+4\cos\phi)=1$.

שם המשטח: מישור.

ג. מערכת גלילית: $r^2\cos^2\theta+z^2=16$. מערכת כדורית: $r^2(1-\sin^2\theta\sin^2\phi)=16$.

שם המשטח: גליל.

ד. מערכת גלילית: $z=r$. מערכת כדורית: $\phi=\frac{\pi}{4}$. שם המשטח: חרוט.

3) א. מערכת קרטזית: $x^2+y^2=9$. שם המשטח: גליל.

ב. מערכת קרטזית: $z=x^2+y^2$. שם המשטח: פרבולואיד.

ג. מערכת קרטזית: $z=\sqrt{x^2+y^2}$. שם המשטח: חרוט.

ד. מערכת קרטזית: $y=x$. שם המשטח: מישור.

ה. מערכת קרטזית: $x^2+(y-2)^2=4$. שם המשטח: גליל.

ו. מערכת קרטזית: $z=x^2-y^2$. שם המשטח: פרבולואיד היפרבולי.

4) א. מערכת קרטזית: $x^2+y^2+z^2=9$. שם המשטח: ספירה.

ב. מערכת קרטזית: $y=\sqrt{3}x$. שם המשטח: מישור.

ג. מערכת קרטזית: $z=\sqrt{x^2+y^2}$. שם המשטח: חרוט.

ד. מערכת קרטזית: $z=2$. שם המשטח: מישור.

ה. מערכת קרטזית: $x^2+y^2+(z-2)^2=4$.

שם המשטח: ספירה שמרכזה בנקודה $(0,0,2)$ ורדיוסה 2.

5) א. מערכת קרטזית: $x^2+y^2=1$. שם המשטח: גליל.

ב. מערכת קרטזית: $(x-1)^2+y^2=1$. שם המשטח: גליל.

ג. מערכת קרטזית: $(x-1)^2+y^2+z^2=1$. שם המשטח: ספירה.

6) א. $V_{r\theta z}=\left\{(r,\theta,z)\,|\,0\le r\le 1,\ 0\le\theta\le 2\pi,\ r\le z\le 2-r^2\right\}$

ב. $V_{r\theta z}=\left\{(r,\theta,z)\,|\,0\le r\le\sqrt{2},\ 0\le\theta\le 2\pi,\ r^2\le z\le\sqrt{6-r^2}\right\}$

7) א. $V_{r\theta z}=\left\{(r,\theta,z)\,|\,0\le r\le\sqrt{0.5},\ 0\le\theta\le 2\pi,\ r^2\le z\le 1-r^2\right\}$

ב. $V_{r\theta z}=\left\{(r,\theta,z)\,|\,0\le r\le 2\cos\theta,\ -0.5\pi\le\theta\le 0.5\pi,\ 0\le z\le 4-r^2\right\}$

8) א. $V_{r\theta z}=\left\{(r,\theta,z)\,|\,0\le r\le 1,\ 0\le\theta\le 2\pi,\ -\sqrt{4-r^2}\le z\le\sqrt{4-r^2}\right\}$

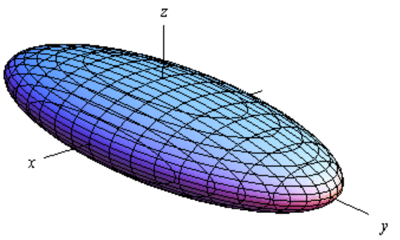
ב. $V_{r\theta z}=\left\{(r,\theta,z)\,|\,0\le r\le 1,\ 0\le\theta\le\frac{\pi}{2},\ 0\le z\le\sqrt{4-r^2}\right\}$

ג. $V_{r\theta z}=\left\{(r,\theta,z)\,|\,0\le r\le 1,\ 0\le\theta\le 2\pi,\ r\le z\le\sqrt{4-r^2}\right\}$

ד. $V_{r\theta z}=\left\{(r,\theta,z)\,|\,1\le r\le 2,\ 0\le\theta\le 2\pi,\ 0\le z\le 10-r\sin\theta\right\}$

נספח – משטחים ממעלה שנייה

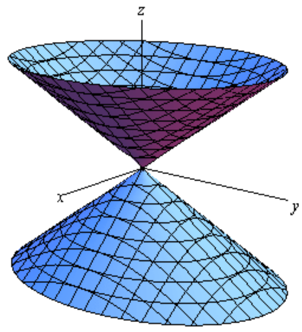
אליפסואיד



משוואה: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

תיאור: החתכים במישורי הקואורדינטות הם אליפסות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים. אם $a=b=c$, נקבל **כדור** עם רדיוס a והחתכים הנ"ל הם מעגלים.

חרוט אליפטי

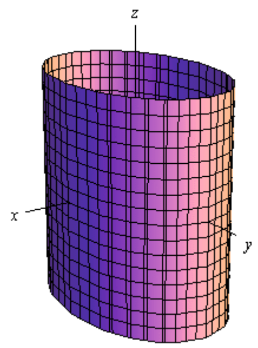


משוואה: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$

תיאור: החתך במישור xy הוא נקודה (הראשית); החתכים במישורים מקבילים למישור xy הם אליפסות. החתכים במישור xz ו- yz הם זוג ישרים הנחתכים בראשית; החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו הם היפרבולות.

* מרכז החרוט הוא על הציר המתאים למשתנה המופיע לבד באחד האגפים.

גליל אליפטי

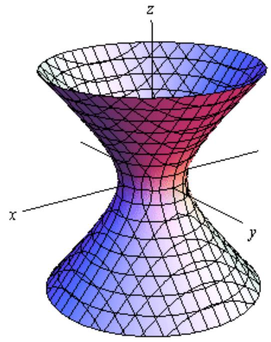


משוואה: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

תיאור: החתך במישור xy הוא אליפסה; כך הם החתכים במישורים מקבילים למישור xy. החתכים במישור xz ו- yz הם זוג ישרים מקבילים וכך הם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו. במידה ומשוואת הגליל היא $x^2+y^2=r^2$, החתכים הנ"ל הם מעגלים.

* מרכז הגליל הוא על הציר המתאים למשתנה שאינו מופיע במשוואת הגליל.

היפרבולואיד חד-יריעתי

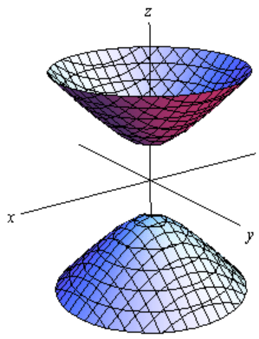


<u>משוואה</u>: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$

<u>תיאור</u>: החתך במישור xy הוא אליפסה ; כך הם החתכים במישורים מקבילים למישור xy. החתכים במישור xz ו- yz הם היפרבולות ; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

* מרכז ההיפרבולואיד חד-יריעתי הוא על הציר המתאים למשתנה שלפניו המינוס.

היפרבולואיד דו-יריעתי

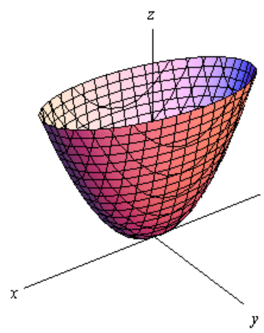


<u>משוואה</u>: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$

<u>תיאור</u>: למשטח זה אין חתך במישור xy ; החתכים במישורים מקבילים למישור xy , החותכים את המשטח, הם אליפסות. החתכים במישור xz ו- yz הם היפרבולות ; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

* מרכז ההיפרבולואיד דו-יריעתי הוא על הציר המתאים למשתנה שלפניו המינוס.

פרבולואיד אליפטי



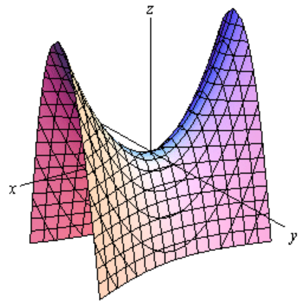
<u>משוואה</u>: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c}$

<u>תיאור</u>: החתך במישור xy הוא נקודה (הראשית) ; החתכים במישורים מקבילים למישור xy ונמצאים מעליו הם אליפסות. החתכים במישור xz ו- yz הם פרבולות ; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

* מרכז הפרבולואיד האליפטי הוא על הציר המתאים למשתנה המופיע ללא ריבוע.

* אם $c>0$ הפרבולואיד נפתח כלפי מעלה ואם $c<0$ הפרבולואיד נפתח כלפי מטה.

פרבולואיד היפרבולי



<u>משוואה</u>: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c}$

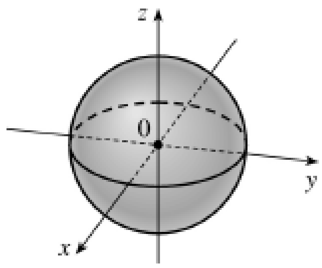
<u>תיאור</u>: החתך במישור xy הוא זוג ישרים נחתכים בראשית; החתכים במישורים מקבילים למישור xy הם היפרבולות; אלו שמעל למישור xy נפתחות בכיוון ציר ה- y ואלו שמתחת למישור xy נפתחות בכיוון ציר ה- x.

החתכים במישור xz ו- yz הם פרבולות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

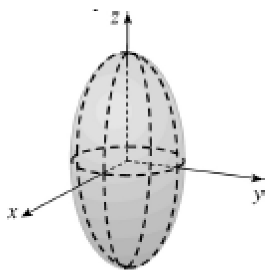
* מרכז הפרבולואיד האליפטי הוא על הציר המתאים למשתנה המופיע ללא ריבוע.

* אם $c>0$ הפרבולואיד נפתח כלפי מעלה ואם $c<0$ הפרבולואיד נפתח כלפי מטה.

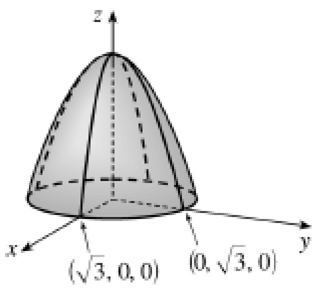
דוגמאות שונות



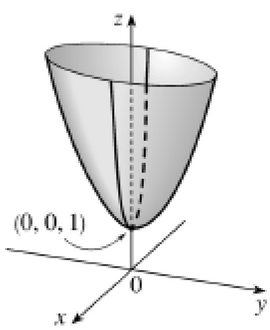
$x^2+y^2+z^2=1$



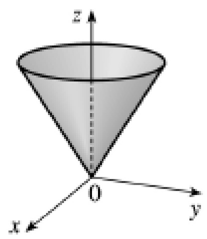
$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{16}=1$



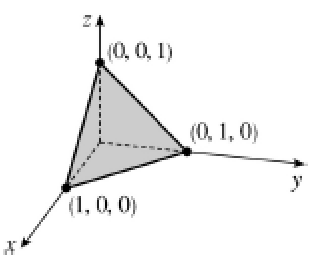
$z=3-x^2-y^2$



$z=4x^2+y^2+1$



$z=\sqrt{x^2+y^2}$



$x+y+z=1$

אנליזה מתמטית

פרק 2 - פונקציות של מספר משתנים - מבוא, קווי גובה, משטחי רמה

תוכן העניינים

מבוא לפונקציה של שני משתנים

עבור כל אחת מהפונקציות הבאות:

א. מצאו את תחום ההגדרה D של הפונקציה.

ב. שרטטו סקיצה של הקבוצה D.

(1 $f(x,y)=\sqrt{5-x^2-y^2}+\ln(4y-x^2)$

(2 $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2-4}+\frac{1}{\sqrt{x}}$

(3 $f(x,y)=\sqrt{-x^2+y^2+1}+\frac{x+y}{x-y}$

(4 $g(x,y)=\sqrt{x+4y}+\sqrt{x-4y}$

(5 $f(x,y)=\frac{1}{\sqrt{x+4y}}+\frac{1}{\sqrt{x-4y}}$

(6 $h(x,y)=\sqrt{x-\sqrt{y+4}}$

(7 $f(x,y)=e^{xy}\sqrt{\ln\frac{4}{x^2+y^2}}+\sqrt{x^2+y^2-4}$

(8 $z(x,y)=\frac{4}{\sqrt{1-|x|-|y|}}$

(9 $z(x,y)=\ln\left(\frac{x-4y}{x+4y}\right)$

(10 $f(x,y)=\ln\left[x\ln(y-4x)\right]$

11) $u(x,y,z)=\frac{1}{\sqrt{x+4}}+\frac{1}{\sqrt{y-1}}+\frac{1}{\sqrt{z}}$ (ענו על סעיף א בלבד)

12) $f(x,y)=\tan\frac{y}{x}$ (רק לתלמידי מדעים מדויקים/הנדסה)

13) $f(x,y)=\frac{\arcsin\left(\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{4}y^2\right)}{\ln\left(x^2+y^2-1\right)}$ (רק לתלמידי מדעים מדויקים/הנדסה)

תשובות סופיות

1) $D=\left\{(x,y)\middle|\ \frac{1}{4}x^2\le y\le\sqrt{5-x^2}\right\}$

2) $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\ge 4\ ,\ x>0\}$

3) $D=\{(x,y)\,|\,x^2-y^2\le 1\ ,\ y\ne x\}$

4) $D=\left\{(x,y)\,|\ -\frac{1}{4}x\le y\le\frac{1}{4}x\ \right\}$

5) $D=\left\{(x,y)\,|\ -\frac{1}{4}x< y<\frac{1}{4}x\ \right\}$

6) $D=\{(x,y)\,|\ -4\le y\le x^2-4\ ,\ x\ge 0\ \}$

7) $D=\{(x,y)\,|\ x^2+y^2=4\ \}$

8) $D=\{(x,y)\,|\,|x|+|y|<1\}$

9) $D=\left\{(x,y)\middle|\frac{1}{4}x<y<-\frac{1}{4}x\ or\ -\frac{1}{4}x<y<\frac{1}{4}x\right\}$

10) $D=\{(x,y)\,|\,[x<0\,\text{and}\,4x<y<4x+1]\ \text{or}\ [x>0\ \text{and}\ y>4x+1]\}$

11) $D=\{(x,y,z)\,|\,x>-4,y>1,z>0\}$

12) $D=\left\{(x,y)\in R^2\middle|x\ne 0,\ y\ne\left(\frac{\pi}{2}+\pi k\right)x\ \ k\in\mathbb{Z}\right\}$

13) $D=\{(x,y)|\ 1<\ x^2+y^2\ne 2\ <4\}$

קווי גובה לפונקציה של שני משתנים

עבור כל אחת מהפונקציות בשאלות **1-6**, מצאו תחום הגדרה, שרטטו אותו, ושרטטו את מפת קווי הגובה/רמה של הפונקציה:

1) $f(x,y)=\frac{y}{x}$

2) $f(x,y)=\ln x+\ln y$

3) $f(x,y)=x^2+y^2$

4) $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$

5) $f(x,y)=\ln(x^2-y)$

6) $f(x,y)=x\sqrt{y}$

עבור כל אחת מהפונקציות בשאלות **7-10** שרטטו מפת קווי גובה:

7) $f(x,y)=(x-1)^2+(y+3)^2$

8) $f(x,y)=e^{x-y}$

9) $f(x,y)=2\ln x+\ln y$

10) $f(x,y)=\min\{3x,y\}$

עבור כל אחת מהפונקציות בשאלות **11-13**, שרטטו את קו הגובה k:

11) $f(x,y)=(x-y)^2$ $\quad(k=0,4)$

12) $f(x,y)=\min\left\{y-x^2,x+y\right\}$ $\quad(k=0,2)$

13) $f(x,y)=\begin{cases}x^2+3x-y-3 & x^2\ge y\\ -x^2+3x+y-3 & x^2<y\end{cases}$ $\quad(k=1)$

14) נתונה הפונקציה $f(x,y)=\begin{cases} x^2-y & x\le 1 \\ 2x+y & x>1 \end{cases}$.

א. שרטטו את קו הגובה $f(x,y)=0$.

ב. לאילו ערכי C קו הגובה $f(x,y)=C$ הוא קו רציף?
ציירו את קו הגובה במקרה זה.

הערות

* בסוף קובץ זה תמצאו סיכום של כל המשטחים הנפוצים.
** קווי גובה = קווי רמה = עקומות אדישות = עקומות שוות ערך.

תשובות סופיות

1) $x\neq 0$, המישור ללא ציר ה- y .

2) $x>0, y>0$, הרביע הראשון ללא הצירים.

3) כל המישור.

4) $x^2+y^2\le 1$, עיגול היחידה.

5) $y<x^2$

6) $y\ge 0$, חצי המישור העליון.

לפתרונות מלאים ושרטוטים של שאר השאלות, היכנסו לאתר : GooL.co.il

משטחי רמה לפונקציה של שלושה משתנים

שאלות

1) נתונה הפונקציה $f(x,y,z)=\sqrt{4-x^2-y^2}-z$.
מצאו את משטח הרמה 2 של הפונקציה ושרטטו אותו.

2) נתונה הפונקציה $f(x,y,z)=z+x^2+y^2$.
מצאו את משטח הרמה 4 של הפונקציה ושרטטו אותו.

3) עבור כל אחת מהפונקציות הבאות מצאו את משטחי הרמה:
א. $f(x,y,z)=4^{x+y-z}$
ב. $f(x,y,z)=z-x^2-y^2$

4) נתונה הפונקציה $f(x,y,z)=\dfrac{x^2+y^2}{x^2+z^2}$.
מצאו את משטחי הרמה של הפונקציה.

5) נתונה הפונקציה $f(x,y,z)=z^2-y^2-x^2$.
מצאו את משטחי הרמה של הפונקציה.

תשובות סופיות

1) חצי ספירה עליונה שמרכזה בנקודה $(0,0,-2)$ ורדיוסה 2.

2) פרבולואיד אליפטי שמרכזו בנקודה $(0,0,4)$ ונפתח כלפי מטה.

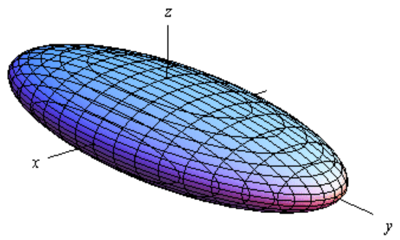
3) א. מישורים.
ב. משטח רמה k הוא פרבולואיד אליפטי,
שמרכזו בנקודה $(0,0,k)$ ונפתח כלפי מעלה.

4) עבור $k<0$ לא קיים משטח רמה k.
עבור $k=0$ נקודה $(0,0,0)$. עבור $k=1$ מישורים.
עבור $k>1$ חרוט אליפטי שמרכזו על ציר ה- y.
עבור $0<k<1$ חרוט אליפטי שמרכזו על ציר ה- z.

5) עבור $k<0$ היפרבולואיד חד-יריעתי. עבור $k=0$ חרוט אליפטי.
עבור $k<0$ היפרבולואיד דו-יריעתי.

נספח – משטחים ממעלה שנייה

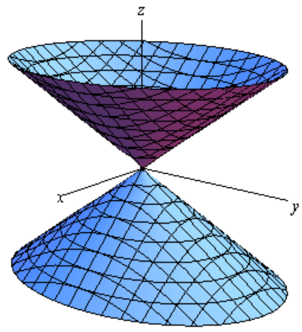
אליפסואיד



משוואה: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

תיאור: החתכים במישורי הקואורדינטות הם אליפסות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים. אם $a=b=c$, נקבל **כדור** עם רדיוס a והחתכים הנ"ל הם מעגלים.

חרוט אליפטי

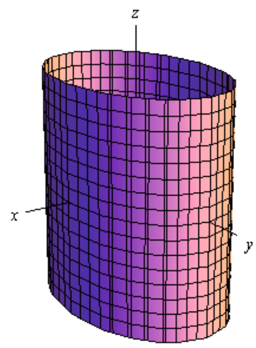


משוואה: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$

תיאור: החתך במישור xy הוא נקודה (הראשית); החתכים במישורים מקבילים למישור xy הם אליפסות. החתכים במישור xz ו- yz הם זוג ישרים הנחתכים בראשית; החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו הם היפרבולות.

* מרכז החרוט הוא על הציר המתאים למשתנה המופיע לבד באחד האגפים.

גליל אליפטי

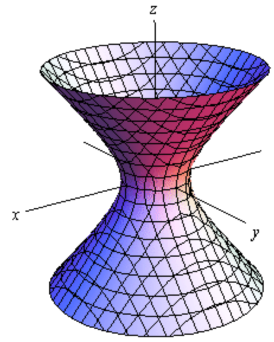


משוואה: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

תיאור: החתך במישור xy הוא אליפסה; כך הם החתכים במישורים מקבילים למישור xy. החתכים במישור xz ו- yz הם זוג ישרים מקבילים וכך הם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו. במידה ומשוואת הגליל היא $x^2+y^2=r^2$, החתכים הנ"ל הם מעגלים.

* מרכז הגליל הוא על הציר המתאים למשתנה שאינו מופיע במשוואת הגליל.

היפרבולואיד חד-יריעתי

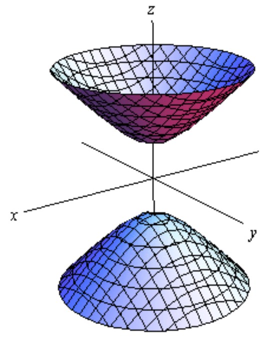


<u>משוואה</u>: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$

<u>תיאור</u>: החתך במישור xy הוא אליפסה; כך הם החתכים במישורים מקבילים למישור xy. החתכים במישור xz ו- yz הם היפרבולות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

* מרכז היפרבולואיד חד-יריעתי הוא על הציר המתאים למשתנה שלפניו המינוס.

היפרבולואיד דו-יריעתי

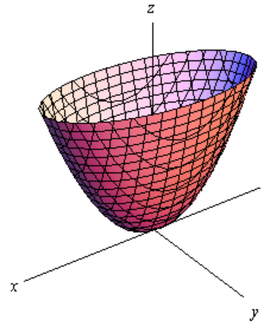


<u>משוואה</u>: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$

<u>תיאור</u>: למשטח זה אין חתך במישור xy; החתכים במישורים מקבילים למישור xy, החותכים את המשטח, הם אליפסות. החתכים במישור xz ו- yz הם היפרבולות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

* מרכז היפרבולואיד דו-יריעתי הוא על הציר המתאים למשתנה שלפניו המינוס.

פרבולואיד אליפטי



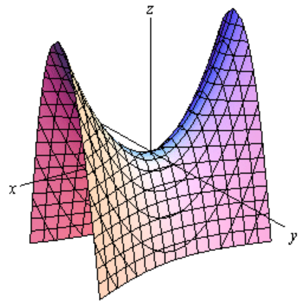
<u>משוואה</u>: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c}$

<u>תיאור</u>: החתך במישור xy הוא נקודה (הראשית); החתכים במישורים מקבילים למישור xy ונמצאים מעליו הם אליפסות. החתכים במישור xz ו- yz הם פרבולות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

* מרכז הפרבולואיד האליפטי הוא על הציר המתאים למשתנה המופיע ללא ריבוע.

* אם $c>0$ הפרבולואיד נפתח כלפי מעלה ואם $c<0$ הפרבולואיד נפתח כלפי מטה.

פרבולואיד היפרבולי



<u>משוואה</u>: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c}$

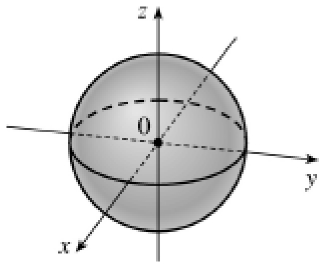
<u>תיאור</u>: החתך במישור xy הוא זוג ישרים נחתכים בראשית; החתכים במישורים מקבילים למישור xy הם היפרבולות; אלו שמעל למישור xy נפתחות בכיוון ציר ה- y ואלו שמתחת למישור xy נפתחות בכיוון ציר ה- x.

החתכים במישור xz ו- yz הם פרבולות; כך הם גם החתכים במישורים מקבילים למישורים אלו.

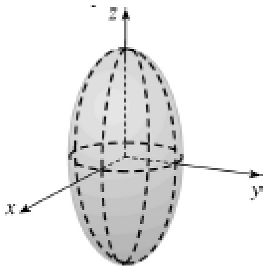
* מרכז הפרבולואיד האליפטי הוא על הציר המתאים למשתנה המופיע ללא ריבוע.

* אם $c>0$ הפרבולואיד נפתח כלפי מעלה ואם $c<0$ הפרבולואיד נפתח כלפי מטה.

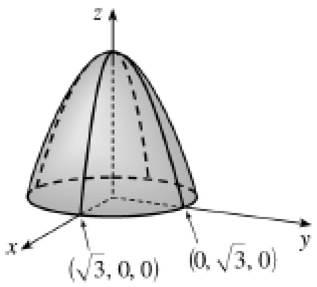
דוגמאות שונות



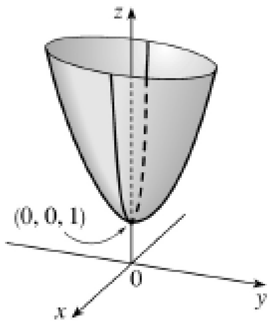
$x^2+y^2+z^2=1$



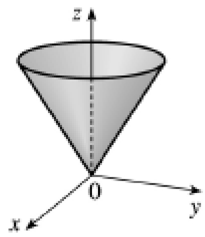
$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{16}=1$



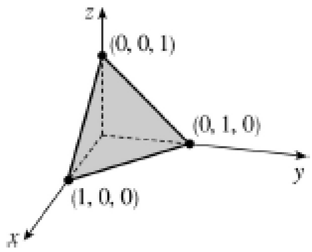
$z=3-x^2-y^2$



$z=4x^2+y^2+1$



$z=\sqrt{x^2+y^2}$



$x+y+z=1$

אנליזה מתמטית

פרק 3 - גבולות ורציפות של פונקציות של מספר משתנים

תוכן העניינים

גבול של פונקציה של שני משתנים

שאלות

חשבו את הגבולות בשאלות **1-9**:

1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^3y)}{x^3y}$

2) $\lim\limits_{(x,y)\to(3,2)} \frac{\sin(xy-6)}{x^2y^2-36}$

3) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} \frac{\arctan(x+y-3)}{\ln(x+y-2)}$

4) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0^+)} (x^2+y)\ln(x^2+y)$

5) $\lim\limits_{(x,y)\to(1^+,1^+)} \frac{\sin(\sqrt{x+2y-3})}{x+2y-3}$

6) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)} \frac{\sqrt{2x+y-3}-1}{2x+y-4}$

7) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \frac{xy-y^2}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$

8) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,1,2)} \frac{\sin\left(x\left(y^2+z^2\right)\right)}{xy^2}$

9) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}{\sqrt[3]{x^2+y^2}}$

חשבו את הגבולות בשאלות **10-17**:

10) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\left(x^2+y^2\right)^2}{x^4+y^2}$

11) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} |y|^x$

12) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^3+y^2}{x^2+y^2}$

13) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x}{y}$

14) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$

15) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^3y}{2x^6+y^2}$

16) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sin(xy)}{x^2+y^2}$

17) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0\\ z\to 0}} \dfrac{xyz}{x^2+y^4+z^4}$

חשבו את הגבולות בשאלות **18-25**:

18) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3y}{x^2+y^2}$

19) $\lim\limits_{(x,y)\to(\infty,\infty)} \dfrac{x-y}{x^2+yx+y^4}$

20) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2+y^2}}$

21) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^4+y^4}{x^2+y^2}$

22) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{3x^2-x^2y^2+3y^2}{x^2+y^2}$

23) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{4x^2y-5y^4}{x^2+4y^2}$

24) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} y\ln\left(x^2+y^2\right)$

25) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \dfrac{x^3+y^3+z^3}{x^2+y^2+z^2}$

* בשאלות **18**, **20-23** ו-**25** מומלץ לנסות לפתור בשתי דרכים שונות.

26) ענו על הסעיפים הבאים:

א. חשבו את הגבול $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^3y}{x^3+y^2}$.

ב. היעזרו בגבול הידוע $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\sin t}{t}=1$, וחשבו את הגבול $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sin\left(x^3y\right)}{x^3+y^2}$.

ג. היעזרו בגבול הידוע $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{e^t-1}{t}=1$, וחשבו את הגבול $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{e^{x^3y}-1}{x^3+y^2}$.

ד. היעזרו בגבול הידוע $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\ln(t+1)}{t}=1$, וחשבו את הגבול $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\ln\left(x^3y+1\right)}{x^3+y^2}$.

* קחו בחשבון שייתכן שהגבול הידוע לא יינתן בגוף השאלה.

27) הוכיחו לפי ההגדרה כי $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}(\sin x+\cos y)=1$.

28) הוכיחו לפי ההגדרה כי $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 1}} x^2 y = 4$.

29) הוכיחו לפי ההגדרה כי $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 4}} 2x^2 y = 8$.

תשובות סופיות

1) 1

2) $\frac{1}{12}$

3) 1

4) 0

5) אינסוף.

6) $\frac{1}{2}$

7) 2

8) 5

9) 0

10) – 17) אין לפונקציה גבול.

18) 0

19) 0

20) 0

21) 0

22) 3

23) 0

24) 0

25) 0

26) א-ד. 0

27) שאלת הוכחה.

28) שאלת הוכחה.

29) שאלת הוכחה.

רציפות של פונקציה של שני משתנים

שאלות

בשאלות **3-1** בדקו את רציפות הפונקציות בנקודה $(0,0)$.
במידה והפונקציה אינה רציפה בנקודה,
האם ניתן להגדיר אותה כך שתהיה רציפה בנקודה?

1)
$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin\left(x^2+y^2\right)}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 2 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

2)
$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

3)
$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^3+y} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

בשאלות **5-4** בדקו את רציפות הפונקציות בנקודה $(1,4)$.

4)
$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{(x-1)(y-4)^2}{(x-1)^2+\sin^2(y-4)} & (x,y)\neq(1,4)\\ 0 & (x,y)=(1,4)\end{cases}$$

5)
$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{(x-1)(y-4)}{(x-1)^2+\sin^2(y-4)} & (x,y)\neq(1,4)\\ 0 & (x,y)=(1,4)\end{cases}$$

6) נתון $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^m\sin y}{x^2+5y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$, כאשר m קבוע.
עבור אילו ערכים של m הפונקציה רציפה בראשית?

7) נתונה פונקציה ממשית רציפה $f = f(x)$, שאינה פונקציה קבועה,

ונגדיר פונקציה חדשה $g(x,y)\begin{cases} f\left(\dfrac{x^2-4y^2}{x^2+5y^2}\right) & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$.

האם הפונקציה g רציפה בנקודה $(0,0)$?

8) הוכיחו או הפריכו את הטענה הבאה:

אם $\lim\limits_{x\to0} f(x,y)=f(0,y)$ לכל y,

וגם $\lim\limits_{y\to0} f(x,y)=f(x,0)$ לכל x,

אז $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}} f(x,y)=f(0,0)$.

9) פונקציה $f(x,y)$ מקיימת $\left|f(x,y)\right|\leq\sin^2\left(x^4+y^4\right)$, לכל (x,y).

הוכיחו שהפונקציה רציפה בנקודה $(0,0)$.

10) מה צריך להיות הערך של הקבוע k (אם בכלל), על מנת שהפונקציה

$f(x,y,z)=\begin{cases}\dfrac{xyz}{x^2+y^2+z^2} & (x,y,z)\neq(0,0,0)\\ k & (x,y,z)=(0,0,0)\end{cases}$ תהיה רציפה בכל המרחב?

11) נתון כי:

לכל x מתקיים $|f(x,y_2)-f(x,y_1)|\leq|y_2-y_1|$ (תנאי ליפשיץ לפי המשתנה y).

לכל y מתקיים $|f(x_2,y)-f(x_1,y)|\leq|x_2-x_1|$ (תנאי ליפשיץ לפי המשתנה x).

הוכיחו כי $f(x,y)$ רציפה בכל המישור.

12) הוכיחו או הפריכו:

נתון כי $f(x,y)$ רציפה בכל המישור.

נגדיר פונקציה חדשה $z(x,y)=\dfrac{f(x,y)}{\sqrt{(x-y)^2-100}}$.

ידוע כי $z(1,14)<0,\ \ z(14,1)>0$.

אז בתחום ההגדרה של z קיימת נקודה (c_1,c_2), כך ש- $z(c_1,c_2)=0$.

תשובות סופיות

1) הפונקציה לא רציפה. אם נגדיר $f(0,0)=1$, הפונקציה תהיה רציפה.
2) הפונקציה רציפה.
3) הפונקציה אינה רציפה. אין לה בכלל גבול.
4) הפונקציה רציפה.
5) הפונקציה לא רציפה. אין לה בכלל גבול.
6) עבור $m>1$ הפונקציה רציפה, ועבור $m\le 1$ הפונקציה לא רציפה.
7) הפונקציה לא רציפה.
8) שאלת הוכחה.
9) שאלת הוכחה.
10) $k=0$
11) שאלת הוכחה.
12) שאלת הוכחה.

נוסחאות – גבולות

	$x \to -\infty$	$x \to 0$	$x \to \infty$
$y = \frac{1}{x}$	$\frac{1}{-\infty} = 0$	$\frac{1}{0^+} = \infty, \quad \frac{1}{0^-} = -\infty$	$\frac{1}{\infty} = 0$
$y = e^x$	$e^{-\infty} = 0$	$e^0 = 1$	$e^\infty = \infty$
$y = \ln x$	$---$	$\ln(0^+) = -\infty$	$\ln(\infty) = \infty$
$y = \arctan x$	$\text{atan}(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$	$\text{atan}(0) = 0$	$\text{atan}(\infty) = \frac{\pi}{2}$
$y = a^x, a > 1$ $y = a^x, 0 < a < 1$	$a^{-\infty} = 0$ $a^{-\infty} = \infty$	$a^0 = 1$ $a^0 = 1$	$a^\infty = \infty$ $a^\infty = 0$
$y = \sin x$	$---$	$\sin 0 = 0$	$---$
$y = \cos x$	$---$	$\cos 0 = 1$	$---$
$y = \frac{\sin x}{x}$	0	1	0
$y = \frac{\tan x}{x}$	$---$	1	$---$
$y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ $y = (1+x)^{\frac{1}{x}}$	e $---$	(from right) 1 e	e 1
$y = \sqrt{x}$ $y = \sqrt[3]{x}$	$---$ $-\infty$	$\sqrt{0^+} = 0$ $\sqrt[3]{0} = 0$	$\sqrt{\infty} = \infty$ $\sqrt[3]{\infty} = \infty$

Defined Limits:

$\infty \cdot \infty = \infty$, $\quad \infty(-\infty) = -\infty$, $\quad \infty + \infty = \infty$, $\quad \infty \pm a = \infty$, $\quad \infty \cdot (\pm a) = \pm\infty$, $\quad \infty / (\pm a) = \pm\infty$

Undefined Limits :

$\frac{0}{0}, \ \frac{\infty}{\infty}, \ \infty - \infty, \ 0 \cdot \infty, \ 1^\infty, \ 0^0, \ \infty^0$

אנליזה מתמטית

פרק 4 - נגזרות חלקיות

תוכן העניינים

נגזרות חלקיות מסדר ראשון

שאלות

בשאלות **1-10** חשבו את הנגזרות החלקיות מסדר ראשון של הפונקציה הנתונה.

1) $f(x,y)=4x^3-3x^2y^2+2x+3y$

2) $f(x,y)=x^5\ln y$

3) $f(x,y)=\dfrac{x^2y^4\left(\sqrt{y}+5\ln y\right)}{y^2+5y+y^y}$ (רק f_x).

4) $f(x,y)=\left(x^2+y^3\right)\cdot(2x+3y)$

5) $f(x,y)=\dfrac{x^2-3y}{x+y^2}$

6) $f(x,y)=\sin(xy)$

7) $f(x,y)=\arctan(2x+3y)$

8) $f(r,\theta)=r\cos\theta$

9) $f(x,y,z)=xy^2z^3$

10) $f(u,v,t)=e^{uv}\sin(ut)$

11) נתון $z(x,y)=\ln\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)$.

הוכיחו כי $x\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1}{2}$.

12) נתון $f(x,y,z)=e^x\left(y^2-\dfrac{1}{z}\right)$.

חשבו $\dfrac{\partial f}{\partial z}\left(0,-1,\dfrac{1}{2}\right),\ \dfrac{\partial f}{\partial y}\left(0,-1,\dfrac{1}{2}\right),\ \dfrac{\partial f}{\partial x}\left(0,-1,\dfrac{1}{2}\right)$.

הערת סימון

$$\boxed{f=f(x,y)\ \Rightarrow\ f_x=\frac{\partial f}{\partial x}=f_1\ ;\ f_y=\frac{\partial f}{\partial y}=f_2}$$

תשובות סופיות

1) $f_x = 12x^2 - 6xy^2 + 2$ $f_y = -6x^2y + 3$

2) $f_x = 5x^4 \ln y$ $f_y = \frac{x^5}{y}$

3) $f_x = 2x\frac{y^4\left(\sqrt{y}+5\ln y\right)}{y^2+5y+y^y}$

4) $f_x = 6x^2 + 6xy + 2y^3$ $f_y = 6xy^2 + 12y^3 + 3x^2$

5) $f_x = \frac{x^2+2xy^2+3y}{\left(x+y^2\right)^2}$ $f_y = \frac{-3x+3y^2-2x^2y}{\left(x+y^2\right)^2}$

6) $f_x = \cos(xy)\cdot y$ $f_y = \cos(xy)\cdot x$

7) $f_x = \frac{2}{1+(2x+3y)^2}$ $f_y = \frac{3}{1+(2x+3y)^2}$

8) $f_r = \cos\theta$ $f_\theta = -r\sin\theta$

9) $f_x = y^2z^3$ $f_y = 2xyz^3$ $f_z = 3xy^2z^2$

10) $f_u = e^{uv}\left[v\sin ut + t\cos ut\right]$ $f_v = u\cdot e^{uv}\cdot\sin ut$ $f_t = u\cdot e^{uv}\cdot\cos ut$

11) שאלת הוכחה.

12) $\frac{\partial f}{\partial x}\left(0,-1,\frac{1}{2}\right) = -1,\ \frac{\partial f}{\partial y}\left(0,-1,\frac{1}{2}\right) = -2,\ \frac{\partial f}{\partial z}\left(0,-1,\frac{1}{2}\right) = 4$

הערת סימון

$$f = f(x,y) \Rightarrow \begin{array}{ll} f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = f_1 & f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = f_2 \\ f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{11} & f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{22} \\ f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{12} & f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{21} \end{array}$$

נגזרות חלקיות מסדר שני

שאלות

בשאלות **1-14** חשבו את כל הנגזרות החלקיות עד סדר שני של הפונקציה הנתונה:

1) $f(x,y)=4x^2-x^2y^2+4x+10y$

2) $f(x,y)=x^4\ln y$

3) $f(x,y)=x^3+y^3-6xy$

4) $f(x,y)=x^3+y^3+3(1-y)(x+y)$

5) $f(x,y)=xy(x-y)$

6) $f(x,y)=(x-9)(2y-6)(4x-3y+12)$

7) $f(x,y)=e^{xy}(x+y)$

8) $f(x,y)=e^{x+y}\left(x^2+y^2\right)$

9) $f(x,y)=\left(x^2+2y^2\right)e^{-\left(x^2+y^2\right)}$

10) $f(x,y)=\ln\left(1+x^2+y^2\right)$

11) $f(x,y)=\ln\left(x^2+y^2\right)$

12) $f(x,y)=\ln\left(\sqrt[3]{x^2+y^2}\right)$

13) $f(x,y)=\sin(10x+4y)$

14) $f(x,y,z)=xyz$

15) חשבון $f_{xy}^{'}(1,1)$, עבור $f(x,y)=\ln\left(xy-x^2-y^2\right)$.

16) חשבון $f_{xy}^{'}(1,1)$, עבור $f(x,y)=\ln\left(x^2+y^2\right)$.

17) חשבון $f_{xy}^{'}(1,1)$, עבור $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$.

18) נתון $f(x,y)=\dfrac{x^2}{\ln y+x}$.

חשבון $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(1,e)$ $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,e),$ $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,e),$.

הערת סימון

$$f=f(x,y)\quad\Rightarrow\quad \begin{array}{ll} f_x=\dfrac{\partial f}{\partial x}=f_1 & f_y=\dfrac{\partial f}{\partial y}=f_2 \\ f_{xx}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=f_{11} & f_{yy}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=f_{22} \\ f_{xy}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=f_{12} & f_{yx}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=f_{21} \end{array}$$

תשובות סופיות

1) $f_x = 8x - 2xy^2 + 4$ $\quad f_{xx} = 8 - 2y^2$ $\quad f_y = -2x^2y + 10$

$f_{yy} = -2x^2$ $\quad f_{xy} = -4xy$ $\quad f_{yx} = -4xy$

2) $f_x = 4x^3 \ln y$ $\quad f_{xx} = 12x^2 \ln y$ $\quad f_y = \frac{x^4}{y}$

$f_{yy} = -\frac{x^4}{y^2}$ $\quad f_{xy} = \frac{4x^3}{y}$ $\quad f_{yx} = \frac{4x^3}{y}$

3) $f_x = 3x^2 - 6y$ $\quad f_{xx} = 6x$ $\quad f_y = 3y^2 - 6x$

$f_{yy} = 6y$ $\quad f_{xy} = 6$ $\quad f_{yx} = -6$

4) $f_x = 3x^2 + 3 - 3y$ $\quad f_{xx} = 6x$ $\quad f_y = 3y^2 + 3 - 3x - 6y$

$f_{yy} = 6y - 6$ $\quad f_{xy} = -3$

5) $f_x = 2xy - y^2$ $\quad f_{xx} = 2y$ $\quad f_y = x^2 - 2xy$

$f_{yy} = -2x$ $\quad f_{xy} = f_{yx} = 2x - 2y$

6) $f_x = 2\left[8xy - 3y^2 \cdot 1 - 24x - 0 + 57y \cdot 1 + 72 + 0 + 0\right]$

$f_y = 2\left[4x^2 \cdot 1 - 3x \cdot 2y - 0 - 54y + 57x \cdot 1 + 0 + 27 + 0\right]$

$f_{xx} = 2[8y - 0 - 24]$ $\quad f_{yy} = 2[0 - 6x \cdot 1 - 54 + 0 + 0]$

$f_{xy} = 2[8x \cdot 1 - 6y - 0 + 57 + 0]$

7) $f_x = e^{xy}\left(xy + y^2 + 1\right)$ $\quad f_y = e^{xy}\left(x^2 + xy + 1\right)$

$f_{xx} = e^{xy} \cdot y\left(xy + y^2 + 1\right) + \left(y + 0 + 0\right) \cdot e^{xy}$ $\quad f_{yy} = e^{xy} \cdot x\left(x^2 + xy + 1\right) + \left(0 + x\right) \cdot e^{xy}$

$f_{xy} = e^{xy} \cdot x\left(xy + y^2 + 1\right) + \left(x + 2y\right) \cdot e^{xy}$

8) $f_x = e^{x+y}\left(x^2 + y^2 + 2x\right)$ $\quad f_y = e^{x+y}\left(x^2 + y^2 + 2y\right)$

$f_{xx} = e^{x+y}\left(x^2 + y^2 + 2x\right) + \left(2x + 2\right)e^{x+y}$,

$f_{yy} = e^{x+y}\left(x^2 + y^2 + 2y\right) + \left(2y + 2\right)e^{x+y}$

$f_{xy} = e^{x+y}\left(x^2 + y^2 + 2x\right) + 2y \cdot e^{x+y}$

9) $f_x = e^{-x^2-y^2}\left(2x - 2x^3 - 4xy^2\right)$ $\quad f_y = e^{-x^2-y^2}\left(4y - 2x^2y - 4y^3\right)$

$f_{xx} = e^{-x^2-y^2}\left(-2x\right)\left(2x - 2x^3 - 4xy^2\right) + \left(2 - 6x^2 - 4y^2\right)e^{-x^2-y^2}$

$f_{yy} = e^{-x^2-y^2}\left(-2y\right)\left(4y - 2x^2y - 4y^3\right) + \left(4 - 2x^2 - 12y^2\right)e^{-x^2-y^2}$

$f_{xy} = e^{-x^2-y^2}\left(-2y\right)\left(2x - 2x^3 - 4xy^2\right) + \left(-4x \cdot 2y\right)e^{-x^2-y^2}$

(10
$$f_x=\frac{2x}{1+x^2+y^2}\qquad f_y=\frac{2y}{1+x^2+y^2}$$
$$f_{xy}=\frac{2y\cdot 2x}{\left(1+x^2+y^2\right)^2}\qquad f_{yy}=\frac{2\cdot\left(1+x^2+y^2\right)-2y\cdot 2y}{\left(1+x^2+y^2\right)}$$

(11
$$f_x=\frac{2x}{x^2+y^2}\qquad f_y=\frac{2y}{x^2+y^2}\qquad f_{xx}=\frac{2\left(x^2+y^2\right)-2x\cdot 2x}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$
$$f_{yy}=\frac{2\left(x^2+y^2\right)-2y\cdot 2y}{\left(x^2+y^2\right)^2}\qquad f_{xy}=\frac{0\left(x^2+y^2\right)-2y\cdot 2x}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

(12
$$f_x=\frac{2x}{x^2+y^2}\cdot\frac{1}{3}\qquad f_y=\frac{2y}{x^2+y^2}\cdot\frac{1}{3}\qquad f_{xx}=\frac{2\left(x^2+y^2\right)-2x\cdot 2x}{\left(x^2+y^2\right)^2}\cdot\frac{1}{3}$$
$$f_{yy}=\frac{2\left(x^2+y^2\right)-2y\cdot 2y}{\left(x^2+y^2\right)^2}\cdot\frac{1}{3}\qquad f_{xy}=\frac{0\left(x^2+y^2\right)-2y\cdot 2x}{\left(x^2+y^2\right)^2}\cdot\frac{1}{3}$$

(13
$$f_x=10\cos\left(10x+4y\right)\qquad f_{xx}=-100\sin\left(10x+4y\right)$$
$$f_y=4\cos\left(10x+4y\right)\qquad f_{yy}=-16\sin\left(10x+4y\right)$$
$$f_{xy}=-40\sin\left(10x+4y\right)\qquad f_{yx}=-40\sin\left(10x+4y\right)$$

(14
$$f_x=yz\qquad f_{xx}=0\qquad f_{xy}=z\qquad f_{xz}=y$$
$$f_y=xz\qquad f_{yx}=z\qquad f_{yy}=0\qquad f_{yz}=x$$
$$f_z=xy\qquad f_{zx}=y\qquad f_{zy}=x\qquad f_{zz}=0$$

(15 -2

(16 -1

(17 $-\frac{1}{2\sqrt{2}}$

(18 $\frac{\frac{4}{e^2}\left(1+\frac{1}{e}\right)}{16}$

נגזרות חלקיות לפי ההגדרה

שאלות

1) נתונה הפונקציה $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$.

א. חשבו את הנגזרות החלקיות של הפונקציה הבאה בנקודה $(0,0)$.

ב. האם הפונקציה רציפה בנקודה $(0,0)$?

ג. האם פונקציה גזירה חלקית היא בהכרח רציפה?

2) מצאו את הנגזרות החלקיות של $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$, בנקודה $(0,0)$.

3) מצאו את הנגזרות החלקיות של $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{(y+x^2)^2}{y^2+x^4} & (x,y)\neq(0,0)\\ 1 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$, בנקודה $(0,0)$.

4) נתונה הפונקציה $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y\sin x}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$.

א. הוכיחו שהפונקציה לא רציפה בנקודה $(0,0)$.

ב. הוכיחו שלפונקציה קיימות נגזרות חלקיות בנקודה $(0,0)$ וחשבו אותן.

5) נתונה הפונקציה $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3+y^4}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$.

א. חשבו את הנגזרות החלקיות של הפונקציה.

ב. האם **הנגזרות החלקיות** של הפונקציה רציפות בנקודה $(0,0)$?

6) נתונה הפונקציה $f(x,y)=\begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$.

א. בדקו האם $f_{xy}(0,0)=f_{yx}(0,0)$, על ידי חישוב ישיר.

ב. האם הנגזרות המעורבות רציפות בנקודה $(0,0)$?

ג. האם $f_{yxyxyxy}(1,4)=f_{xyxyxyx}(1,4)$.

הערה
תרגילים נוספים בהמשך הפרק, תחת הכותרת <u>דיפרנציאביליות</u> – שאלות 6 ו-7 סעיף ב'.

תשובות סופיות

1) א. $f_x(0,0)=0$, $f_y(0,0)=0$ ב. לא רציפה בנקודה $(0,0)$.
ג. פונקציה גזירה חלקית אינה בהכרח רציפה.

2) $f_x(0,0)=1$, $f_y(0,0)=0$

3) $f_x(0,0)=0$, $f_y(0,0)=0$

4) א. שאלת הוכחה. ב. $f_x(0,0)=0$, $f_y(0,0)=0$

5) א.
$$f_x(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^4+3x^2y^2-2xy^4}{\left(x^2+y^2\right)^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 1 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$
$$f_y(x,y)=\begin{cases} \dfrac{2y^5+4x^2y^3-2x^3y}{\left(x^2+y^2\right)^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$
ב. לא רציפות.

6) א. $f_{yx}(0,0)=1 \neq f_{xy}(0,0)=-1$

ב. הנגזרות המעורבות לא רציפות בנקודה $(0,0)$. ג. כן.

אנליזה מתמטית

פרק 5 - קיצון ואוכף לפונקציה של שני משתנים

תוכן העניינים

קיצון ואוכף לפונקציה של שני משתנים

שאלות

עבור כל אחת מהפונקציות בשאלות **1-8**,
מצאו נקודות קריטיות וסווגו אותן למקסימום, מינימום או אוכף:

1) $f(x,y)=8x^3+12xy+3y^2-18x$

2) $f(x,y)=x^3+y^3-3x-12y+20$

3) $f(x,y)=x^3+y^3-3xy+4$

4) $f(x,y)=3x-x^3-2y^2+y^4$

5) $f(x,y)=e^{4y-x^2-y^2}$

6) $f(x,y)=y\sqrt{x}-y^2-x+6y$

7) $f(x,y)=\dfrac{x^2y^2-8x+y}{xy}$

8) $f(x,y)=e^x\cos y$

9) נתון משטח $z=x^3+y^3-3xy+4$.
מצאו את משוואות המישורים המשיקים האופקיים למשטח.

10) מבין כל התיבות הפתוחות שנפחן 32 סמ״ק, חשבו את ממדי התיבה ששטח הפנים שלה הוא מינימלי.

11) מצאו את המרחק הקצר ביותר מהנקודה $(1,2,3)$ למישור $-2x-2y+z=0$,
וכן את הנקודה על המישור הקרובה ביותר לנקודה הנ״ל.

12) יצרן מוכר מחשבונים, בארץ ובסין.
עלות הייצור של מחשבון בארץ היא $6\$$ ועלות ייצור מחשבון בסין היא $8\$$.
מנהל השיווק אומד את הביקוש Q_1 למחשבון בארץ, ואת הביקוש Q_2
למחשבון בסין, על ידי: $Q_2 = 144 + 16P_1 - 24P_2, \quad Q_1 = 116 - 30P_1 + 20P_2$.
כיצד צריכה החנות לקבוע את מחירי המחשבונים, P_1 ו- P_2, על מנת למקסם את הרווח? מהו רווח זה?

13) נתונה הפונקציה $f(x,y) = x^2 + y^2 + axy$.
א. הוכיחו שהנקודה $(0,0)$ היא נקודה קריטית.
ב. בעזרת מבחן הנגזרת השנייה, קבעו עבור אילו ערכים של a הנקודה מסעיף א' היא מקסימום, מינימום, אוכף, או שלא ניתן לדעת.

14) מצאו שני מספרים, $a < b$, כך ש- $\int_a^b (24 - 2x - x^2)^{\frac{1}{5}} dx$ יהיה מקסימלי.

תשובות סופיות

1) $(-0.5,1)$ אוכף; $(1.5,-3)$ מינימום.
2) $(1,\ 2)$ מינימום; $(-1,-2)$ מקסימום; $(-1,\ 2)$, $(1,-2)$ אוכף.
3) $(0,0)$אוכף; $(1,1)$ מינימום.
4) $(-1,\ 1)(-1,\ -1)$ מינימום; $(1,\ 0)$ מקסימום; $(-1,\ 0),(1,1),(1,\ -1)$ אוכף.
5) $(0,\ 2)$ מקסימום.
6) $(4,\ 4)$ מקסימום.
7) $(-0.5,\ 4)$ מקסימום.
8) אין נקודות קריטיות.
9) $z=3, \quad z=4$
10) רוחב 4 ס"מ, אורך 4 ס"מ, גובה 2 ס"מ.
11) מרחק מינימלי הוא 1 יחידות אורך. נקודה קרובה ביותר $(1/3, 4/3, 10/3)$.
12) $P_2 = 12\$, \quad P_1 = 10\$$ רווח מקסימלי $288\$$.
13) א. שאלת הוכחה. ב. עבור $a=-2, \ a=2$, לא ניתן לדעת; $a<-2, \ a>2$
אוכף; $-2<a<2$ מינימום.
14) $b=4, \ a=-6$

אנליזה מתמטית

פרק 6 - קיצון של פונקציה רבת משתנים (רמה מתקדמת) - הריבועים הפחותים

תוכן העניינים

קיצון של פונקציה רבת משתנים (מתקדם) – ריבועים פחותים

שאלות

מצאו את נקודות הקיצון של הפונקציות בשאלות **5-1**:

1) $f(x,y)=1+2xy-x^2-y^2$

2) $f(x,y)=4-\sqrt{x^2+y^2}$

3) $(z=f(x,y))\ z^3+z+xy-2x-y+2=0$

4) $f(x,y)=x^3-y^3-3x^2+6y^2+3x-12y+8$

5) $(x,y,z>0)\ f(x,y,z)=x+\frac{y^2}{4x}+\frac{z^2}{y}+\frac{2}{z}$

6) מצאו מרחק מינימלי בין הפרבולה $y=x^2+1$, לפרבולה $y=-x^2+2x$.

* לפתרון תרגיל זה נדרש ידע בפתרון נומרי (מקורב) של משוואה, כגון שיטת ניוטון רפסון.

בשאלות **11-7** נתונות n נקודות, $(x_1,y_1),(x_2,y_2),...,(x_n,y_n)$, ויש למצוא קו עקום מהצורה $y=h(x)$, כך שסכום ריבועי המרחקים האנכיים בין העקום והנקודות יהיה מינימלי.

7) $h(x)=ax+b$, הדגימו עבור הנקודות $(2,2.5),(1,0.8),(3,3.2),(4,3.5)$.

8) $h(x)=ax^2+bx$, הדגימו עבור הנקודות $(-1,2),(2,0),(0,-2)$.

9) $h(x)=ax+\frac{b}{x}$, הדגימו עבור הנקודות $(10,20.2),(6,12.9),(4,8.5),(0.5,4)$.

10) $h(x)=ax^2+\frac{b}{x^2}$, הדגימו עבור הנקודות $(4,33),(2,8.5),(0.5,2.3),(1,4.5),(0.1,90)$.

11) $h(x)=ax^2+bx+c$, הדגימו עבור $(1,4.5),(0.5,2.3),(0,0.8),(-1,0.1),(-0.5,0.12)$.

12) נתונות n נקודות : $(x_1,y_1),(x_2,y_2),\dots,(x_n,y_n)$.
מצאו ישר $y=ax+b$, כך שסכום ריבועי המרחקים האנכיים בין הישר והנקודות יהיה מינימלי.
יש להגיע לנוסחה מפורשת עבור a ו- b .

הערה : בשאלות **11** ו-**12** ניתן להניח ש- a ו- b , המתקבלים מפתרון המשוואות $f_a=0,\ f_b=0$, נותנים את המינימום המוחלט של פונקציית ריבועי המרחקים האנכיים $f(a,b)=\sum_{i=1}^{n}\left(h(x_i)-y_i\right)^2$.

תשובות סופיות

1) (t,t) לכל t ממשי, מקסימום.

2) $(0,0)$ מקסימום.

3) אין קיצון. $(1,2)$ אוכף.

4) אין קיצון. $(1,2)$ אוכף.

5) $(0.5,1,1)$ מינימום.

6) 0.375

7) $y=0.88x+0.3$

8) $y=\frac{2}{3}x^2-\frac{4}{3}x$

9) $y=2.032x+\frac{1.5039}{x}$

10) $y=2.06x^2+\frac{0.9}{x^2}$

11) $y=1.48x^2+2.196x+0.824$

12) $b=\frac{\sum_{i=1}^{n}y_i\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\sum_{i=1}^{n}y_ix_i\sum_{i=1}^{n}x_i}{n\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2}$, $a=\frac{n\sum_{i=1}^{n}y_ix_i-\sum_{i=1}^{n}y_i\sum_{i=1}^{n}x_i}{n\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)^2}$

אנליזה מתמטית

פרק 7 - קיצון של פונקציה של שני משתנים תחת אילוץ (כופלי לגראנז')

תוכן העניינים

קיצון של פונקציה של שני משתנים תחת אילוץ (כופלי לגראנז')

שאלות

בשאלות **1-4** מצאו את המקסימום והמינימום של הפונקציות, בכפוף לאילוץ הנתון:

1) $f(x,y)=x^2+y^2; \quad 2x^2+3xy=1-2y^2$

2) $f(x,y)=x^2-y^2; \qquad x^2+y^2=1$

3) $f(x,y)=4x+6y; \qquad x^2+y^2=13$

4) $f(x,y)=x^2y; \qquad x^2+2y^2=6$

5) נתונה בעיית הקיצון $x+3y=12 \quad s.t. \quad \max\{xy\}$, כאשר $x,y>0$.
א. פתרו את הבעיה.
ב. הביאו פתרון גרפי לבעיה.

6) נתונה בעיית הקיצון $\sqrt{x}+\sqrt{y}=9 \quad s.t. \quad \max\{2x+y\}$, כאשר $x,y\geq 0$.
א. פתרו את הבעיה.
ב. הביאו פתרון גרפי לבעיה.

7) מבין כל הנקודות הנמצאות על הישר $x+3y=12$,
מצאו את זו שמכפלת שיעוריה מקסימלי.

8) מבין כל הנקודות שעל העקומה $2x^2+3xy=1-2y^2$, מצאו את הנקודות שמרחקן מראשית הצירים הוא מינימלי, ואת הנקודות שמרחקן מראשית הצירים הוא מקסימלי.

9) מצאו את המרחק הקצר ביותר מהישר $3x-6y+4=0$,
לפרבולה $x^2+2xy+y^2+4y=0$.

רמז: מרחק הנקודה (x_0,y_0) מהישר $ax+by+c=0$, הוא $\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

10) מוישל'ה קונה בשוק x ק"ג מלפפונים ו- y ק"ג עגבניות.
התועלת מצריכת הסל (x,y), נתונה על ידי $u(x,y)=\ln x+\ln y$.
מחיר ק"ג מלפפונים 1 ש"ח, ומחיר ק"ג עגבניות 2 ש"ח.
מוישל'ה קובע לעצמו להשיג רמת תועלת $\ln 16$,
והוא מעוניין להשיג זאת בעלות מינימאלית.
נסחו ופתרו את בעיית מוישל'ה.

11) דני קונה בשוק x ק"ג מלפפונים ו- y ק"ג עגבניות.
התועלת מצריכת הסל (x,y) נתונה על ידי $u(x,y)=xy$.
מחיר ק"ג מלפפונים 1 ש"ח, ומחיר ק"ג עגבניות 3 ש"ח.
לדני תקציב של 12 ש"ח.
נסחו ופתרו את בעיית דני.

12) עקומת התמורה בין מנגו, (x), ואננס, (y), היא $x^2+y^2=13$.
לדני תועלת $f(x,y)=4x+6y$.
דני מחפש את הסל (אננס, מנגו) = (x,y), על עקומת התמורה,
המביא למקסימום את התועלת שלו מצריכת מנגו ואננס.
נסחו ופתרו את הבעיה.

13) ליצרן פונקציית ייצור $Q=\sqrt{k}+\sqrt{L}$.
המחירים ליחידת K ו- L הם $P_K=2,\ P_L=1$.
היצרן נמצאו ברמת תפוקה 100 והוא מחפש את הצירוף $\left(K^*,L^*\right)$,
המביא למינימום את העלות.
נסחו את בעיית היצרן (לא לפתור).

14) נתונה בעיית קיצון תחת אילוץ $\max\{u(x,y)\}\ \ s.t.\ \ p_1x+p_2y=I$.
תהי $\left(x^*,y^*\right)$ נקודת הפתרון של הבעיה. ניתן להניח מצב קלאסי של השקה.
הוכיחו כי כופל לגראנז' λ מקיים $\lambda=\dfrac{x\cdot u_x+y\cdot u_y}{I}$ בנקודת הפתרון של הבעיה.

תשובות סופיות

1) $\min\left(\pm\sqrt{1/7},\pm\sqrt{1/7}\right)$ $\max(\pm1,\mp1)$

2) $\max(\pm1,0)$ $\min(0,\pm1)$

3) $\min(-2,-3)$ $\max(2,3)$

4) $\min(\pm2,-1)$ $\max(\pm2,1)$

5) $\max(6,2)$

6) $\max(9,36)$

7) $(6,2)$

8) $\min\left(\pm\sqrt{1/7},\pm\sqrt{1/7}\right)$ $\max(\pm1,\mp1)$

9) $7/\sqrt{45}$

10) $\min\left(\sqrt{32},\sqrt{8}\right)$

11) $\max(6,2)$

12) $\max(2,3)$

13) $\sqrt{K}+\sqrt{L}=100;\ \min\{2K+L\}$

14) שאלת הוכחה.

אנליזה מתמטית

פרק 8 - קיצון של פונקציה של שלושה משתנים תחת אילוצים

תוכן העניינים

קיצון של פונקציה של שלושה משתנים תחת אילוצים

שאלות

1) מבין כל התיבות הפתוחות שנפחן 32 סמ"ק, חשבו את ממדי התיבה ששטח הפנים שלה הוא מינימלי.

2) מצאו על פני הכדור $x^2+y^2+z^2=36$ את הנקודות הקרובות ביותר לנקודה $(1,2,2)$ ואת הנקודות הרחוקות ביותר מהנקודה $(1,2,2)$.

3) ענו על הסעיפים הבאים:

א. מצאו את המרחק הקצר ביותר מהנקודה $(1,2,3)$ למישור $-2x-2y+z=0$.

ב. מצאו נקודה על המישור $-2x-2y+z=0$, שהיא הקרובה ביותר לנקודה $(1,2,3)$.

ג. בדקו את התשובה על ידי חישוב המרחק בעזרת הנוסחה למרחק בין נקודה למישור.

4) מצאו את הנקודות על המשטח $z^2=xy+1$ הקרובות ביותר לראשית.

5) מצאו את המרחק הגדול ביותר והקטן ביותר מהאליפסואיד $\frac{x^2}{96}+y^2+z^2=1$ למישור $3x+4y+12z=288$. רמז: מרחק הנקודה (x_0,y_0,z_0) מהמימשור $ax+by+cz+d=0$, הוא $\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

6) מצאו מרחק מינימלי ומקסימלי בין העקום המתקבל מחיתוך הגליל $x^2+y^2=1$ והמישור $z=x+y$ לבין ראשית הצירים.

7) מצאו מרחק מינימלי ומקסימלי בין העקום המתקבל מחיתוך האליפסואיד $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{5}+\frac{z^2}{25}=1$ והמישור $z=x+y$, לבין ראשית הצירים.

הערה חשובה

בפתרון מרבית התרגילים בפרק זה, אנו מסיקים שנקודה קריטית היא נקודת קיצון משיקולים פיסיקליים או גיאומטריים, היות ומדובר בבעיות מעשיות. ישנן דרכים מתמטיות מתקדמות להוכיח פורמלית, אך מאחר ולא נהוג ללמד אותן ברוב מוסדות הלימוד, הסתפקנו בכך.

תשובות סופיות

1) רוחב 4 ס"מ, אורך 4 ס"מ, גובה 2 ס"מ.
2) הנקודה הקרובה ביותר היא הנקודה $(2,4,4)$,
והנקודה הרחוקה ביותר היא הנקודה $(-2,-4,-4)$.
3) א. מרחק מינימלי הוא 1 יחידות אורך.
ב. הנקודה הקרובה ביותר $(1/3, 4/3, 10/3)$.
4) $(0,0,1)$, $(0,0,-1)$
5) המרחק הקצר ביותר $256/13$. המרחק הארוך ביותר $320/13$.
6) מרחק מינימלי 1. מרחק מקסימלי $\sqrt{3}$.
7) מרחק מינימלי $75/17$. מרחק מקסימלי 10.

אנליזה מתמטית

פרק 9 - אינטגרלים כפולים

תוכן העניינים

אינטגרלים כפולים

שאלות

חשבו את האינטגרלים בשאלות **3-1**:

1) $\int_0^1\int_0^1 (x+y)\,dxdy$

2) $\int_0^1\int_{x^2}^{x} xy^2\,dydx$

3) $\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a r^2\sin^2\varphi\, dr$

באינטגרל $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$, הציבו את הגבולות בשני סדרי האינטגרציה כאשר:

4) D – משולש בעל הקודקודים: $\text{O}(0,0), \text{A}(1,0), \text{B}(1,1)$.

5) D – משולש בעל הקודקודים: $\text{O}(0,0), \text{A}(2,1), \text{B}(-2,1)$.

6) D – טרפז בעל הקודקודים: $\text{O}(0,0), \text{A}(1,0), \text{B}(1,2), \text{C}(0,1)$.

7) D – עיגול $x^2+y^2\le 1$.

8) D – עיגול $x^2+y^2\le y$.

9) $D=\left\{(x,y)\,|\,y\le 1, y\ge x^2\right\}$

10) $D=\left\{(x,y)\,|\,1\le x^2+y^2\le 4\right\}$

חשבו את האינטגרלים הבאים :

11) $\iint\limits_D xy^2dxdy$, כאשר D חסום ע"י הפרבולה $y^2=4x$ והישר $x=1$.

12) $\iint\limits_D \frac{dx\,dy}{\sqrt{4-x}}$, כאשר D חסום ע"י צירי הקואורדינטות והקשת הקצרה של מעגל בעל רדיוס 2 שמרכזו בנקודה $(2,2)$.

13) $\iint\limits_D |x\,y|dxdy$, כאשר D עיגול בעל הרדיוס a , שמרכזו בראשית.

14) $\iint\limits_D (x^2+y^2)dxdy$, כאשר D מקבילית בעלת הצלעות $y=x$, $y=x+a$, $y=a, y=3a$ $(a>0)$.

15) $\iint\limits_D \frac{\cos y}{y^2+\pi^2}dA$, כאשר D התחום הכלוא בין $y=\pi\sqrt{x}, y=\pi, y=0, x=-1$.

תשובות סופיות

1) 1

2) $\frac{1}{40}$

3) $\frac{a^3}{3}\pi$

4) $\int_0^1 dx\int_0^x f(x,y)dy = \int_0^1 dy\int_y^1 f(x,y)dx$

5) $\int_0^2 dx\int_{x/2}^1 f(x,y)dy + \int_{-2}^0 dx\int_{-x/2}^1 f(x,y)dy = \int_0^1 dy\int_{-2y}^{2y} f(x,y)dx$

6) $\int_0^1 dx\int_0^{x+1} f(x,y)dy = \int_0^1 dy\int_0^1 f(x,y)dx + \int_1^2 dy\int_{y-1}^1 f(x,y)dx$

7) $\int_{-1}^1 dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy = \int_{-1}^1 dy\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$

8) $\int_{-1/2}^{1/2} dx\int_{\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}}^{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}} f(x,y)dy = \int_0^1 dy\int_{-\sqrt{y-y^2}}^{\sqrt{y-y^2}} f(x,y)dx$

9) $\int_{-1}^1 dx\int_{x^2}^1 f(x,y)dy = \int_0^1 dy\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y)dx$

10)
$$\int_{-2}^{-1} dy\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)dx + \int_{-1}^{1} dy\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{-\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx +$$
$$+\int_{-1}^{1} dy\int_{\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)dx + \int_{1}^{2} dy\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)dx$$

11) $\frac{32}{21}$

12) $8-\frac{16\sqrt{2}}{3}$

13) $\frac{a^4}{2}$

14) $14a^4$

15) 0

החלפת סדר אינטגרציה

שאלות

החליפו סדר אינטגרציה באינטגרלים בשאלות **1-6**:

1) $\int_{0}^{2}\int_{x}^{2x} f(x,y)dydx$

2) $\int_{-6}^{2}\int_{\frac{x^2}{4}-1}^{2-x} f(x,y)dydx$

3) $\int_{0}^{1}\int_{x^3}^{x^2} f(x,y)dydx$

4) $\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x,y)dydx$

5) $\int_{1}^{2}\int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)dydx$

6) $\int_{1}^{e}\int_{0}^{\ln x} f(x,y)dydx$

חשבו את האינטגרלים הבאים (רמז: שנו את סדר האינטגרציה):

7) $\int_{0}^{4}\int_{\sqrt{y}}^{2} e^{x^3}dxdy$

8) $\int_{0}^{3}\int_{1}^{\sqrt{4-y}} (x+y)dxdy$

9) $\int_{0}^{1}\int_{y^2}^{y^{2/3}} e^{x^2}ydxdy \quad (x,y\geq 0)$

10) $\int_{0}^{4}\int_{x}^{4}\sin(y^2)dydx$

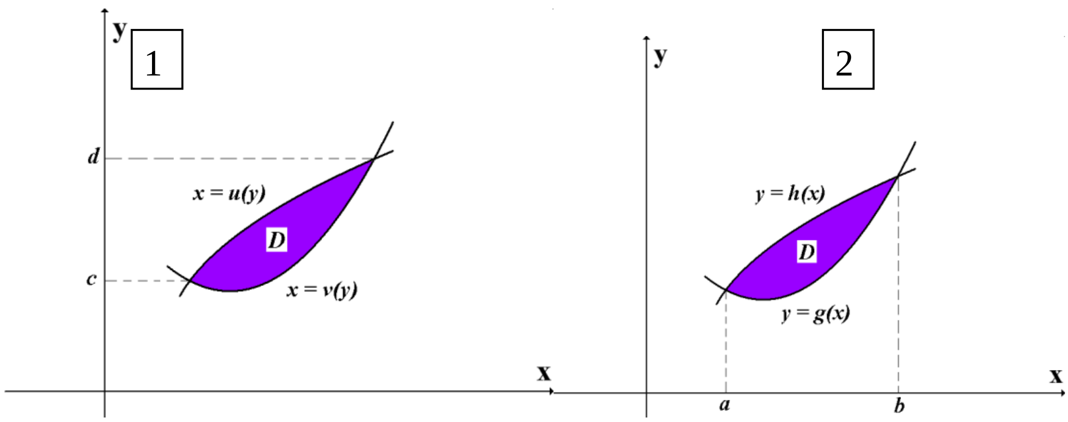
הערות סימון

$\boxed{1}$

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dA = \iint\limits_D f(x,y)\,dydx = \int\limits_a^b \int\limits_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)dydx = \int\limits_a^b dx \int\limits_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)dy$$

$\boxed{2}$

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dA = \iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int\limits_c^d \int\limits_{u(y)}^{v(y)} f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{u(y)}^{v(y)} f(x,y)dx$$



שימו לב, ישנם מוסדות שבהם לא מקפידים, ורושמים למשל את האינטגרל $\int\limits_a^b \int\limits_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)dydx$ כך: $\int\limits_a^b \int\limits_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)dxdy$. רישום זה אינו שגוי מאחר שכפל הוא חילופי. כלומר הרישומים $dxdy$ ו- $dydx$ זהים.

תשובות סופיות

1) $\int_0^2 dy \int_{y/2}^{y} f(x,y)dx + \int_2^4 dy \int_{y/2}^{2} f(x,y)dx$

2) $\int_{-1}^{0} dy \int_{-2\sqrt{y+1}}^{2\sqrt{y+1}} f(x,y)dx + \int_0^8 dy \int_{-2\sqrt{y+1}}^{2-y} f(x,y)dx$

3) $\int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^{\sqrt[3]{y}} f(x,y)dx$

4) $\int_{-1}^{0} dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx + \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}} f(x,y)dx$

5) $\int_0^1 dy \int_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$

6) $\int_0^1 dy \int_{e^y}^{e} f(x,y)dx$

7) $\frac{1}{3}\left(e^8-1\right)$

8) $\frac{241}{60}$

9) $\frac{1}{4}(e-2)$

10) $\frac{1}{2}(1-\cos 16)$

אנליזה מתמטית

פרק 10 - דטרמיננטות

תוכן העניינים

חישוב דטרמיננטה לפי הגדרה ולפי דירוג

שאלות

בשאלות **1-5** חשבן את הדטרמיננטה על ידי הורדת סדר (פיתוח לפי שורה/עמודה) :

1) א. $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ ב. $\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -7 & 3 \end{vmatrix}$ ג. $\begin{vmatrix} 4 & -1.5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$

2) א. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 8 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}$ ב. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ ג. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 5 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}$

3) א. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$ ב. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 5 \\ -2 & 0 & -6 & 0 \\ 5 & 3 & -7 & 4 \\ 2 & 0 & 5 & 44 \end{vmatrix}$ ג. $\begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 7 & 2 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -1 & 1 \end{vmatrix}$

4) $\begin{vmatrix} 1 & 9 & 8 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & -5 & 0 & 2 \\ 2 & -4 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 7 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

5) $\begin{vmatrix} 4 & 0 & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ -7 & 2 & 1 & 5 & 9 \\ 3 & 0 & 4 & 2 & -1 \\ -5 & 0 & -8 & -3 & 2 \end{vmatrix}$

בשאלות **6-7** חשבן את הדטרמיננטה של המטריצות על ידי דירוג.

6) א. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ -2 & -5 & 7 & 4 \\ 3 & 5 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -1 \end{vmatrix}$ ב. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & -5 \\ 2 & 5 & 4 & -3 \\ -1 & -2 & -1 & -1 \end{vmatrix}$ ג. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \\ -1 & 2 & 8 & 5 \\ 3 & -1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$

7) א.
$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 5 & -5 & -1 & -8 \\ -2 & -6 & 2 & 3 & 9 \\ 3 & 7 & -3 & 8 & -7 \\ 3 & 5 & 5 & 2 & 7 \end{vmatrix}$$

ב.
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & -2 \\ 3 & 4 & -5 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 7 \end{vmatrix}$$

ג.
$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 5 & -5 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 7 \end{vmatrix}$$

בשאלות **8-10** חשבו את הדטרמיננטה על ידי שילוב של הורדת סדר ודירוג:

8)
$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & -3 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & -3 \\ -6 & 0 & -4 & 9 \\ 6 & 15 & -7 & -2 \end{vmatrix}$$

9)
$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 0 \\ 5 & 4 & 6 & 6 \\ 3 & 4 & 7 & 3 \end{vmatrix}$$

10)
$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 4 & 1 \\ 6 & 12 & 10 & 3 \\ 6 & -2 & -4 & 0 \\ -6 & 7 & 7 & 0 \end{vmatrix}$$

בשאלות **11-12** הראו, ללא חישוב, שהדטרמיננטה של המטריצות שווה אפס:

11) א.
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 7 & 0 & 12 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

ב.
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 7 & 9 \end{vmatrix}$$

ג.
$$\begin{vmatrix} 12 & 15 & 18 \\ 13 & 16 & 19 \\ 14 & 17 & 20 \end{vmatrix}$$

12) א. $\begin{vmatrix} y+z & z+x & y+x \\ x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ ב. $\begin{vmatrix} a & a+x & a+y \\ b & b+x & b+y \\ c & c+x & c+y \end{vmatrix}$

ג. $\begin{vmatrix} \sin^2 x & \cos^2 x & 1 \\ \sin^2 y & \cos^2 y & 1 \\ \sin^2 z & \cos^2 1 & 1 \end{vmatrix}$ ד. $\begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 & 5 & 0 & 1 & -12 \\ -14 & 4 & 1 & -4 & 1 & 8 & 4 \\ 3 & 5 & -2 & 0 & -4 & 1 & -3 \\ -4 & 2 & 1 & 1 & 0 & 6 & -6 \\ -21 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \\ 2 & -5 & 7 & -4 & 2.5 & -1 & -1.5 \\ -11 & 2 & -6 & 9 & -1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$

בשאלות **13-15** נתון כי: $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 4$.

חשבו:

13) $\begin{vmatrix} a & g+d & 2d \\ b & h+e & 2e \\ c & i+f & 2f \end{vmatrix}$

14) $\begin{vmatrix} 2a-3d & 2d & g+4a \\ 2b-3e & 2e & h+4b \\ 2c-3f & 2f & i+4c \end{vmatrix}$

15) $\begin{vmatrix} 0 & g+3d & 3a & a+3d \\ 0 & h+3e & 3b & b+3e \\ 0 & i+3f & 3c & c+3f \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

16) הוכיחו כי: $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$.

17) הוכיחו כי: $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & y & y^2 & y^3 \\ 1 & z & z^2 & z^3 \\ 1 & t & t^2 & t^3 \end{vmatrix} = (y-x)(z-x)(t-x)(z-y)(t-y)(t-z)$.

18) חשבו: $\det \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & k \\ 1 & 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 & 1 \\ k & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

19) ענו על הסעיפים הבאים:

א. נתונות שתי מטריצות ריבועיות A ו-B מסדר n הנבדלות ביניהן רק בשורה ה-k $(1 \le k \le n)$.
תהי C מטריצה הזהה למטריצות A ו-B אך נבדלת מהן בשורה ה-k, שם היא שווה לסכום השורה ה-k של A והשורה ה-k של B.
הוכיחו כי $|A|+|B|=|C|$.

ב. חשבו: $\begin{vmatrix} a & b & c & d & e \\ f & g & h & i & j \\ k & l & m & n & o \\ p & q & r & s & t \\ -a-1 & 3b & c-1 & d-x & e-y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c & d & e \\ f & g & h & i & j \\ k & l & m & n & o \\ p & q & r & s & t \\ 2a+1 & -2b & 1 & x & y \end{vmatrix}$.

תשובות סופיות

1) א. $ad-bc$ ב. 29 ג. -1
2) א. -1 ב. -3 ג. -14
3) א. 24 ב. 234 ג. -300
4) 9
5) 6
6) א. 0 ב. 0 ג. 3
7) א. 24 ב. 44 ג. 104
8) 120
9) 114
10) 6
11) פתרונות באתר: www.GooL.co.il
12) פתרונות באתר.
13) -8
14) 16
15) 9
16) שאלת הוכחה.
17) שאלת הוכחה.
18) $(k-1)^4(k+4)$
19) א. שאלת הוכחה. ב. 0

חישוב דטרמיננטה לפי משפטי דטרמיננטות

שאלות

בשאלות **1-2** נתון כי A ו- B מטריצות מסדר 3, $|A|=4,\ |B|=2$.
חשבו:

1) א. $\left|ABA^{-1}B^{T}\right|$ ב. $|4A^{2}B^{3}|$

2) א. $|-A^{-2}B^{T}A^{3}|$ ב. $|-2A^{2}A^{T}adjB|$

3) נתון: $(PQ)^{-1}APQ=B$.
הוכיחו: $|A|=|B|$.

4) נתון: A ו- B מטריצות הפיכות מסדר 4, כך ש- $2AB+3I=0$, $|A|=2$.
חשבו את $|B|$.

5) נתון: A ו- B מטריצות הפיכות מסדר 3, כך ש- $B^{2}-2A^{-1}=0$, $A+3B=0$.
חשבו את $|A|, |B|$.

6) הוכיחו: 1. $|A^{-1}|=\frac{1}{|A|}$ 2. $\left|adj\left(A_{nxn}\right)\right|=|A|^{n-1}$.

7) נתון כי A מטריצה אנטי-סימטרית מסדר אי-זוגי.
הוכיחו ש- $|A|=0$.

8) נתון: A מטריצה מסדר n, $|A|=128$, $2AB=B^{T}A^{2}$, ו- B הפיכה.
מצאו את n.

9) נתון: $\det\left(A_{nxn}\right)=2,\ \det\left(B_{nxn}\right)=\frac{1}{3}$.
חשבו: $\det\left|\frac{1}{3}B^{-n}A^{2n}\right|$.

10) נתון $M=\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix}$.

הוכיחו כי $\det(M)=\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)^2$.

תשובות סופיות

1) א. 4 ב. 2^{13}

2) א. -8 ב. -2^{11}

3) שאלת הוכחה.

4) $\frac{81}{32}$

5) $|A|=18, |B|=-2/3$

6) שאלת הוכחה.

7) שאלת הוכחה.

8) 7

9) 4^n

10) שאלת הוכחה.

כלל קרמר

שאלות

בשאלות **3-1** פתרו את מערכות המשוואות בעזרת כלל קרמר:

1)
$$\begin{aligned} x+2y&=5 \\ 3x+4y&=11 \end{aligned}$$

2)
$$\begin{aligned} x+z&=3 \\ 4x+y+8z&=21 \\ 2x+3z&=8 \end{aligned}$$

3)
$$\begin{aligned} x+2z+5t&=8 \\ -2x-6y&=-8 \\ 5x+3y-7z+4t&=5 \\ 2x+5y+44z&=51 \end{aligned}$$

4) נתונה מערכת המשוואות:
$$\begin{aligned} kx+y+z+t+r&=1 \\ x+ky+z+t+r&=1 \\ x+y+kz+t+r&=1 \\ x+y+z+kt+r&=1 \\ x+y+z+t+kr&=1 \end{aligned}$$

א. עבור איזה ערך של k למערכת פתרון יחיד?

ב. עבור איזה ערך של k למערכת פתרון יחיד שבו $x=\frac{1}{2}$?

ג. האם קיים k עבורו למערכת פתרון יחיד שבו $x=\frac{1}{5}$?

ד. הוכיחו שאם למערכת פתרון יחיד, אז בהכרח מתקיים ש- $x=y=z=t=r$.

5) יהיו A,B מטריצות ממשיות מסדר $n\times n$.
עבור כל אחת מהטענות הבאות קבעו האם היא נכונה או לא.

א. אם למערכת ההומוגנית $Ax=0$ קיים פתרון יחיד, אז ייתכן ש- $A^2=0$.

ב. אם למערכת ההומוגנית $\left(A^tA\right)x=0$ קיים פתרון יחיד, אז $|A|=0$.

ג. אם למערכת ההומוגנית $(AB)x=0$ קיים פתרון יחיד, אז ייתכן ש- $|A|=0$.

תשובות סופיות

1) $x=1,\ y=2$

2) $x=1,\ y=1,\ z=2$

3) $x=y=z=t=1$

4) א. $k\neq 1,\ k\neq -4$ ב. $k=-2$ ג. לא. ד. הוכחה.

5) א. לא נכונה. ב. לא נכונה. ג. לא נכונה.

שימושי הדטרמיננטה

שאלות

1) א. חשבו את שטח המקבילית שקדקודיה:

1. $(0,0),(5,2),(6,5),(11,6)$
2. $(-1,0),(0,5),(1,-4),(2,1)$

ב. חשבו את נפח המקבילון שקדקודיו: $(0,0,0),(1,0,-2),(1,2,4),(7,1,0)$.

ג. מצאו משוואת מישור העובר דרך הנקודות: $(3,3,-2),\ (-1,3,1),\ (1,1,-1)$.

ד. חשבו את שטח המשולש שקדקודיו: $(1,2),(3,4),(5,8)$.

<u>הערה</u>: בכל אחד מהסעיפים בתרגיל זה יש להשתמש בדטרמיננטות.

תשובות סופיות

1) א.1. 13. א.2. 14 ב. 22 ג. $3x-y+4z+2=0$ ד. 2

אנליזה מתמטית

פרק 11 - אינטגרלים כפולים בקואורדינטות קוטביות (פולריות)

תוכן העניינים

מבוא מתמטי לפרק

שאלות

1) שרטטו את התחומים הבאים במישור והציגו אותם בהצגה פולרית:

א. $S=\left\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 4\right\}$

ב. $S=\left\{(x,y)\,|\,0\le y\le\sqrt{4-x^2}\right\}$

ג. $S=\left\{(x,y)\,|\,-\sqrt{4-y^2}\le x\le 0\right\}$

2) שרטטו את התחומים הבאים במישור והציגו אותם בהצגה פולרית:

א. $S=\left\{(x,y)\,|\,1\le x^2+y^2\le 4\right\}$

ב. $S=\left\{(x,y)\,|\,1\le x^2+y^2\le 4,\ x\ge 0, y\ge 0\right\}$

ג. $S=\left\{(x,y)\,|\,1\le x^2+y^2\le 4,\ x\ge 0\right\}$

ד. $S=\left\{(x,y)\,|\,1\le x^2+y^2\le 4,\ \ y\ge 0\right\}$

3) שרטטו את התחומים הבאים במישור והציגו אותם בהצגה פולרית:

א. $S=\left\{(x,y)\,|\,1\le x^2+y^2\le 4,\ \ x\le y\le 2x\right\}$

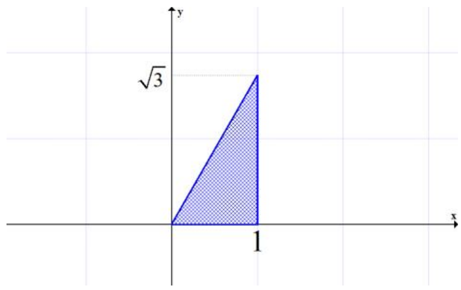
ב. $S=\left\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 4,\ y\ge x\right\}$

4) הציגו את התחום הבא בצורה פולרית: $S=\left\{(x,y)\,|\,\frac{1}{7}x+\frac{25}{7}\le y\le\sqrt{25-x^2}\right\}$.

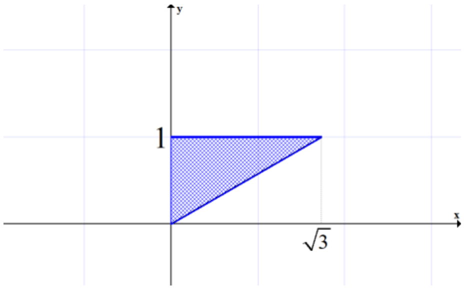
5) הציגו את התחום הבא בצורה פולרית: $S=\left\{(x,y)\,|\,\frac{1}{\sqrt{3}}x\le y\le\sqrt{8x-x^2}\right\}$.

6) להלן שני איורים, ובכל איור תחום.
כתבו כל אחד מהתחומים בהצגה פולרית ותארו במילים כל אחד מהתחומים.

איור א



איור ב



תשובות סופיות

1) א. $\begin{cases} 0 \le r \le 2 \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{cases}$ ב. $\begin{cases} 0 \le r \le 2 \\ 0 \le \theta \le \pi \end{cases}$ ג. $\begin{cases} 0 \le r \le 2 \\ 0.5\pi \le \theta \le 1.5\pi \end{cases}$

2) א. $\begin{cases} 1 \le r \le 2 \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{cases}$ ב. $\begin{cases} 1 \le r \le 2 \\ 0 \le \theta \le 0.5\pi \end{cases}$ ג. $\begin{cases} 1 \le r \le 2 \\ -0.5\pi \le \theta \le 0.5\pi \end{cases}$ *or* $\begin{cases} 1 \le r \le 2 \\ 1.5\pi \le \theta \le 2.5\pi \end{cases}$

ד. $\begin{cases} 1 \le r \le 2 \\ 0 \le \theta \le \pi \end{cases}$

3) א. $\begin{matrix} 1 \le r \le 2 \\ 0.25\pi \le \theta \le \arctan 2 \end{matrix}$ ב. $0 \le r \le 2,\ \ 0.25\pi \le \theta \le 1.25\pi$

4) $$\begin{matrix} \dfrac{25}{7\sin\theta - \cos\theta} \le r \le 5 \\ \arctan\dfrac{4}{3} \le \theta \le \arctan\left(-\dfrac{3}{4}\right) + \pi \end{matrix}$$

5) $0 \le r \le 8\cos\theta,\ \ \dfrac{\pi}{6} \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}$

6) א. $0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{3}$ $\ \ 0 \le r \le \dfrac{1}{\cos\theta}$ ב. $\dfrac{\pi}{6} \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}$ $\ \ 0 \le r \le \dfrac{1}{\sin\theta}$

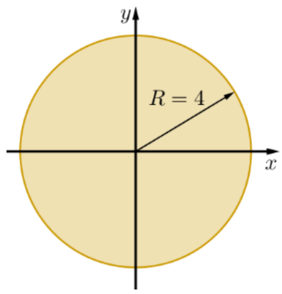
אינטגרלים כפולים בקואורדינטות קוטביות (פולריות)

שאלות

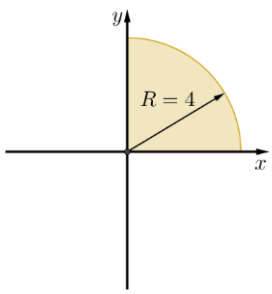
1) חשבו $\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dA$, כאשר D התחום המתואר בשרטוט.

* בסעיף ט אל תחשבו את האינטגרל המתקבל לאחר המעבר לקואורדינטות קוטביות.

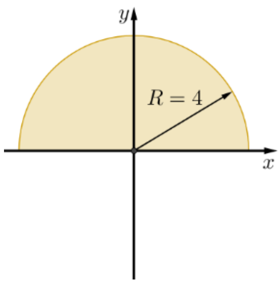
א.



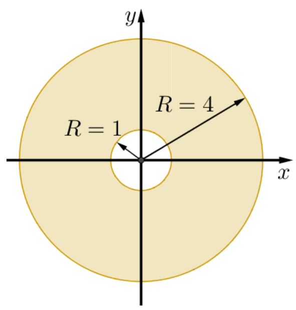
ב.



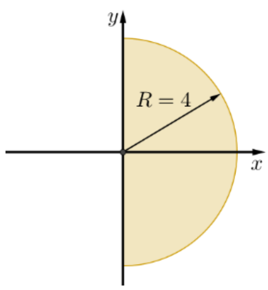
ג.



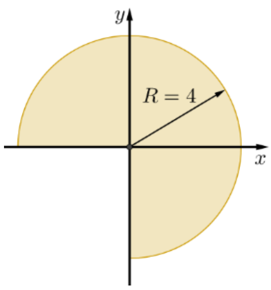
ד.



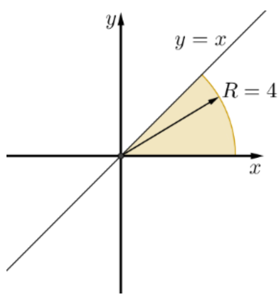
ה.



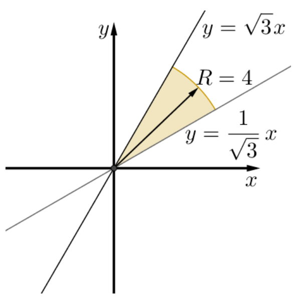
ו.



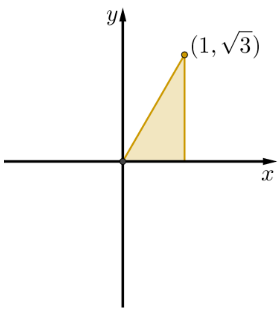
ז.



ח.



ט.



חשבו את האינטגרלים בשאלות **2-17**, תוך מעבר לקואורדינטות קוטביות:

2) $\int_{-1}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} dydx$

3) $\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dydx$

4) $\int_{0}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-y^2}} (x^2+y^2)dxdy$

5) $\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} (x^2+y^2)dxdy$

6) $\int_{-a}^{a}\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} dydx$

7) $\int_{0}^{2}\int_{0}^{\sqrt{4-y^2}} (x^2+y^2)dxdy$

8) $\int_{0}^{6}\int_{0}^{y} xdxdy$

9) $\int_{0}^{2}\int_{0}^{x} ydydx$

10) $\int_{-1}^{0}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{0} \frac{2}{1+\sqrt{x^2+y^2}}dydx$

11) $\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{0} \frac{4\sqrt{x^2+y^2}}{1+x^2+y^2}dxdy$

12) $\int_{0}^{\ln 2}\int_{0}^{\sqrt{\ln^2 2-y^2}} e^{\sqrt{x^2+y^2}}dxdy$

13) $\int_{0}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} e^{-(x^2+y^2)}dydx$

14) $\int_{0}^{2}\int_{0}^{\sqrt{1-(x-1)^2}} \frac{x+y}{x^2+y^2}dydx$

15) $\int_{0}^{2}\int_{-\sqrt{1-(y-1)^2}}^{0} xy^2dxdy$

16) $\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} \ln(x^2+y^2+1)dxdy$

17) $\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{2}{(1+x^2+y^2)^2}dydx$

בשאלות **18-20** חשבו את **נפח הגוף** המתואר:

18) הגוף הכלוא בין פני הכדור $x^2+y^2+z^2=9$ לבין הגליל $x^2+y^2=1$.

19) הגוף הכלוא בתוך הגליל $x^2+y^2=2y$, בין החרוט $z=\sqrt{x^2+y^2}$ מלמעלה לבין המישור xy מלמטה.

20) הגוף הכלוא בתוך הגליל $x^2+y^2=x$, בין הפרבולואיד $z=1-x^2-y^2$ מלמעלה לבין מישור xy מלמטה.

21) חשבו את **שטח התחום** החסום על ידי $x^2+y^2=2x$, $y=0$, $y=x\sqrt{3}$.

תשובות סופיות

1) א. $\frac{128\pi}{3}$ ב. $\frac{32\pi}{3}$ ג. $\frac{64\pi}{3}$ ד. 42π ה. $\frac{64\pi}{3}$

ו. 32π ז. $\frac{16\pi}{3}$ ח. $\frac{32\pi}{9}$ ט. $\int_0^{\frac{\pi}{3}}\int_0^{\frac{1}{\cos\theta}} r^2 dr d\theta$

2) $\frac{\pi}{2}$

3) π

4) $\frac{\pi}{8}$

5) $\frac{\pi}{2}$

6) πa^2

7) 2π

8) 36

9) $\frac{4}{3}$

10) $\pi\ln\frac{e}{2}$

11) $\pi(4-\pi)$

12) $\frac{\pi}{2}\ln\frac{4}{e}$

13) $\frac{\pi(e-1)}{4e}$

14) $\frac{\pi}{2}+1$

15) $-\frac{4}{5}$

16) $\pi\ln\frac{4}{e}$

17) π

18) $\frac{(108-64\sqrt{2})\pi}{3}$

19) $\frac{32}{9}$

20) $\frac{5\pi}{32}$

21) $\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{4}$

אנליזה מתמטית

פרק 12 - החלפת משתנים באינטגרל כפול (יעקוביאן)

תוכן העניינים

החלפת משתנים באינטגרל כפול (יעקוביאן)

שאלות

1) חשבו את האינטגרל הכפול $\iint_R \frac{x-y}{x+y}dA$, כאשר R הוא התחום המוגבל על ידי הישרים $y=3-x,\ y=1-x,\ y=x-1,\ y=x$.

2) חשבו את האינטגרל הכפול $\iint_R e^{xy}dA$, כאשר R הוא התחום המוגבל על ידי הפונקציות $y=x,\ y=0.5x,\ y=\frac{1}{x},\ y=\frac{2}{x}$.

3) חשבו את האינטגרל הכפול $\iint_R \sin\frac{1}{2}(x+y)\cos\frac{1}{2}(x-y)dA$, כאשר R הוא התחום בצורת משולש שקדקודיו הם $\mathrm{A}(0,0),\ \mathrm{B}(2,0),\ \mathrm{C}(1,1)$.

4) חשבו את האינטגרל הכפול $\iint_R (4x+8y)dA$, כאשר R הוא התחום בצורת מקבילית שקדקודיה הם: $\mathrm{A}(-1,3),\ \mathrm{B}(1,-3),\ \mathrm{C}(3,-1),\ \mathrm{D}(1,5)$.

5) חשבו את האינטגרל הכפול $\iint_R \sqrt{16x^2+9y^2}dA$, כאשר R הוא התחום הכלוא בתוך האליפסה $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$.

6) חשבו את האינטגרל הכפול $\iint_R y^2dA$, כאשר R הוא התחום המוגבל על ידי העקומות $y=\frac{1}{x},\ y=\frac{2}{x},\ xy^2=1,\ xy^2=2$.

7) חשבו את האינטגרל הכפול $\iint_R e^{x+y}dA$, כאשר $R=\{(x,y)\mid |x|+|y|\le 1\}$.

תשובות סופיות

1) $\frac{1}{4}\ln 3$

2) $\frac{1}{2}(e^2-e)\ln 2$

3) $1-\frac{1}{2}\sin 2$

4) 192

5) 96π

6) $\frac{3}{4}$

7) $e-\frac{1}{e}$

אנליזה מתמטית

פרק 13 - אינטגרלים משולשים ושימושיהם

תוכן העניינים

אינטגרלים משולשים ושימושיהם

שאלות

חשבו את האינטגרלים בשאלות **1-4**:

1) $$\int_0^1 \int_0^z \int_0^{x+z} 6xzdydxdz$$

2) $$\int_0^3 \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-z^2}} ze^y dxdzdy$$

3) $$B=\{(x,y,z)|0\le x\le 1, -1\le y\le 2, 0\le z\le 3\}\ ,\ \iiint_B xyz^2dV$$

4) $$B=\{(x,y,z)|0\le x\le 1\ ,\ 0\le y\le \sqrt{x}\ ,0\le z\le 1+x+y\}\ ,\ \iiint_B 6xydV$$

חשבו את האינטגרלים בשאלות **5-8**, על ידי שינוי סדר אינטגרציה:

5) $$\int_0^4 \int_0^1 \int_{2y}^2 \frac{4\cos(x^2)}{2\sqrt{z}} dxdydz$$

6) $$\int_0^1 \int_0^1 \int_{x^2}^1 12xze^{zy^2} dydxdz$$

7) $$\int_0^1 \int_{\sqrt[3]{z}}^1 \int_0^{\ln 3} \frac{\pi e^{2x} \sin \pi y^2}{y^2} dxdydz$$

8) $$\int_0^2 \int_0^{4-x^2} \int_0^x \frac{\sin 2z}{4-z} dydzdx$$

בשאלות **9-14** חשבו את **נפחי הגופים** החסומים על ידי המשטחים:

9) $z=1+x+y,\ z=0,\ x+y=1,\ x=0,\ y=0$

10) $z=0\,,\ z=x^2+y^2\,,\ y=1,\ y=x^2$

11) $(x\geq 0)\quad z=0,\ z=x^2+y,\ y=0.5x,\ y=2x,\ y=\frac{2}{x}$

12) $z=0,\ \frac{x}{4}+\frac{y}{2}+\frac{z}{4}=1,\ 2y^2=x$

13) $(z\geq 0)\ x^2+\frac{y^2}{4}=1,\ z=y$

14) $z=x+y,\ z=6,\ x=0,\ y=0,\ z=0$

15) חשבו את המסה ואת מרכז הכובד של גליל שגובהו h ורדיוס הבסיס שלו r.
הניחו שהצפיפות בכל נקודה פרופורציונלית למרחק הנקודה מבסיס הגליל,
כלומר, פונקציית הצפיפות היא מהצורה $\delta(x,y,z)=kz\quad(k>0)$.

16) חשבו את מומנט ההתמד של התיבה ההומוגנית (פונקציית צפיפות קבועה)
$V=\{(x,y,z)\,|\,0\leq x\leq a\ ,\ 0\leq y\leq b\ ,\ 0\leq z\leq c\}$, סביב ציר ה- z.
בטאו את התשובה באמצעות המסה של התיבה, M.

תשובות סופיות

1) 1

2) $\frac{1}{3}\left(e^3-1\right)$

3) $\frac{27}{4}$

4) $\frac{65}{28}$

5) $2\sin 4$

6) $3e-6$

7) 4

8) $\frac{\sin^2 4}{2}$

9) $\frac{5}{6}$

10) $\frac{88}{100}$

11) $\frac{17}{6}$

12) $16\frac{1}{5}$

13) $\frac{8}{3}$

14) 36

15) $\left(\bar{x},\bar{y},\bar{z}\right)=\left(0,0,\frac{2h}{3}\right),\quad M=\frac{1}{2}\pi kh^2r^2$

16) $\frac{1}{3}M\left(a^2+b^2\right)$

אנליזה מתמטית

פרק 14 - אינטגרלים משולשים בקואורדינטות גליליות וכדוריות

תוכן העניינים

אינטגרלים משולשים בקואורדינטות גליליות וכדוריות

שאלות

בשאלות **1-4** חשבו את האינטגרלים המשולשים:

1) $\int_0^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{-(x^2+y^2)}^{x^2+y^2} 21xy^2 dzdydx$

2) $\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1} dzdydx$

3) $\int_0^2 \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} \int_{-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} dzdydx$

4) $\int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} z\sqrt{x^2+y^2+z^2}dzdydx$

5) גוף כלוא בגליל $x^2+y^2=9$, בין המישור xy מלמטה, לבין מחצית פני הכדור $z=\sqrt{25-x^2-y^2}$ מלמעלה.
חשבו את נפח הגוף ואת המרכז שלו.

6) חשבו את הנפח ואת המרכז של גוף החסום על ידי פני הכדור $x^2+y^2+z^2=16$ מלמעלה, ועל ידי החרוט $z=\sqrt{x^2+y^2}$ מלמטה.

7) חשבו את נפח הגוף החסום מלמעלה על ידי פני הכדור $x^2+y^2+z^2=16$ ומלמטה על ידי החרוט $z=\sqrt{x^2+y^2}$, על ידי מעבר לקואורדינטות גליליות.

8) מצאו את הנפח של התחום מעל המישור xy, החסום על ידי הפרבולואיד $z=x^2+y^2$ והגליל $x^2+y^2=a^2$.

9) חשבו את הנפח הכלוא בין $z=x^2+y^2$ ובין $z=2-\sqrt{x^2+y^2}$.

10) חשבו את נפח הגוף החסום מלמעלה על ידי $z=2$ ומלמטה על ידי $z=\sqrt{x^2+y^2}$.
פתרו בשלוש דרכים:
א. על ידי שימוש בקואורדינטות גליליות.
ב. על ידי שימוש בקואורדינטות כדוריות.
ג. על ידי שימוש בנוסחת נפח חרוט.

11) חשבו את נפח הגוף החסום מלמעלה על ידי $z=1$ ומלמטה על ידי $x^2+y^2+(z-2)^2=4$.
פתרו בשתי דרכים:
א. על ידי שימוש בקואורדינטות גליליות.
ב. על ידי שימוש בקואורדינטות כדוריות.

12) חשבו את הנפח המוגבל בין כדור שמרכזו בראשית ורדיוסו 1 לבין כדור שמרכזו בנקודה $(0,0,1)$ ורדיוסו 1.
א. על ידי שימוש בקואורדינטות גליליות.
ב. על ידי שימוש בקואורדינטות כדוריות.

13) הציגו את נפח הגוף החסום בתוך הכדור $x^2+y^2+z^2=4$ ומחוץ לגליל $x^2+y^2=1$, בשלוש דרכים:
א. על ידי שימוש בקואורדינטות קרטזיות.
ב. על ידי שימוש בקואורדינטות גליליות.
ג. על ידי שימוש בקואורדינטות כדוריות.

14) חשבו את נפח הגוף בתומן הראשון המוגבל בין כדור שרדיוסו 1 לבין כדור שרדיוסו 2, בשלוש דרכים:
א. על ידי שימוש בקואורדינטות כדוריות.
ב. על ידי שימוש בקואורדינטות גליליות.
ג. על ידי שימוש בנוסחה ידועה לחישוב נפח כדור.

15) ללא חישוב אינטגרלים חשב את האינטגרלים הבאים:
א. $$V_1=\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{1}\int_{z=r}^{2-r} r\,dz\,dr\,d\theta$$
ב. $$V_2=\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{\phi=0}^{\pi/4}\int_{r=0}^{\frac{2}{\cos\phi+\sin\phi}} r^2\sin\phi\,dr\,d\phi\,d\theta$$

16) ללא חישוב אינטגרלים חשבו את האינטגרלים הבאים :

א. $$V_1=\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{0.5}\int_{z=r}^{0.5+\sqrt{0.25-r^2}} rdzdrd\theta$$

ב. $$V_2=\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{\phi=0}^{\pi/4}\int_{r=0}^{\cos\phi} r^2\sin\phi drd\phi d\theta$$

תשובות סופיות

1) 4

2) $\frac{\pi}{3}$

3) $\frac{24\pi-32}{9}$

4) $\frac{32\pi}{5}$

5) $V=\frac{122}{3}\pi$, $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})=(0,0,1107/488)$

6) $V=\frac{64}{3}\pi(2-\sqrt{2})$, $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})=(0,0,1.5/(2-\sqrt{2}))$

7) $\frac{64\pi}{3}\left(2-\sqrt{2}\right)$

8) $\frac{\pi}{2}a^4$

9) $\frac{5}{6}\pi$

10) $\frac{8\pi}{3}$

11) $\frac{5}{3}\pi$

12) $\frac{5}{12}\pi$

13) א. $V=\int\limits_{x=-2}^{2}\int\limits_{y=-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int\limits_{z=-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{z=\sqrt{4-x^2-y^2}}1dzdydx-\int\limits_{x=-1}^{1}\int\limits_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int\limits_{z=-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{z=\sqrt{4-x^2-y^2}}1dzdydx$

ב. $V=\int\limits_{\theta=0}^{2\pi}\int\limits_{r=1}^{2}\int\limits_{z=-\sqrt{4-r^2}}^{z=\sqrt{4-r^2}}1rdzdrd\theta$ ג. $V=\int\limits_{\phi=\pi/6}^{5\pi/6}\int\limits_{\theta=0}^{2\pi}\int\limits_{r=1/\sin\phi}^{2}r^2\sin\phi drd\theta d\phi$

14) $\frac{7}{6}\pi$

15) $\frac{2\pi}{3}$

16) $\frac{\pi}{8}$

אנליזה מתמטית

פרק 15 - החלפת משתנים באינטגרלים משולשים (יעקוביאן)

תוכן העניינים

החלפת משתנים באינטגרלים משולשים (יעקוביאן)

שאלות

1) חשבון את $\iiint_G (z-y)^2 xydV$, כאשר G הוא הגוף המוגבל על ידי המשטחים $x=1,\quad x=3,\quad z=y,\quad z=y+1,\quad xy=2,\quad xy=4$.

2) חשבון את הנפח של האליפסואיד $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

3) חשבון את $\iiint_G x^2 dV$, כאשר G הוא האליפסואיד $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

4) חשבון את **נפח** התחום המוגבל על ידי המשטחים:
$y=z,\quad y=2z,\quad y=4x,\quad y=4x-12,\quad y=z^2,\quad y=4z^2$.

5) חשבון את $\iiint_G \sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+(z-4)^2}\,dV$, כאשר G הוא כדור שמרכזו בנקודה $(1,2,4)$ ורדיוסו 1.

תשובות סופיות

1) $2\ln 3$

2) $\frac{4}{3}\pi abc$

3) $\frac{4}{15}\pi a^3bc$

4) $\frac{105}{32}$

5) π

אנליזה מתמטית

פרק 16 - מרחבי מכפלה פנימית

תוכן העניינים

מרחבי מכפלה פנימית

שאלות

1) לכל שני וקטורים $u=(x_1,x_2),\ v=(y_1,y_2)$, ב- $\mathbb{R}^2$, נגדיר:

$\langle u,v\rangle = x_1y_1-3x_1y_2-3x_2y_1+4x_2y_2$.

בדקו האם ההגדרה לעיל מהווה מכפלה פנימית ב- $\mathbb{R}^2$.

2) לכל שני וקטורים $u=(x_1,x_2),\ v=(y_1,y_2)$, ב- $\mathbb{R}^2$, נגדיר:

$\langle u,v\rangle = x_1y_1-3x_1y_2-3x_2y_1+kx_2y_2$.

עבור אילו ערכים של הקבוע k ההגדרה לעיל מהווה מכפלה פנימית ב- $\mathbb{R}^2$?

3) לכל שני וקטורים $u=(x_1,x_2,x_3),\ v=(y_1,y_2,y_3)$, ב- $\mathbb{R}^3$, נגדיר:

$\langle u,v\rangle = x_1y_1+kx_1y_3+x_2y_2+kx_3y_1+x_3y_3$.

עבור אילו ערכים של הקבוע k ההגדרה לעיל מהווה מכפלה פנימית ב- $\mathbb{R}^3$?

4) לכל שני וקטורים $u=(u_1,\dots,u_n),\ v=(v_1,\dots,v_n)$, ב- $\mathbb{R}^n$,

נגדיר: $\langle u,v\rangle=\sum_{i=1}^{n}k_iu_iv_i$, כאשר $k_1,\dots,k_n$ מספרים חיוביים כלשהם.

הראו כי הנוסחה לעיל מגדירה מכפלה פנימית ב- $\mathbb{R}^n$.

מהי המכפלה המתקבלת אם $k_i=1$, לכל $1\le i\le n$?

5) לכל שתי מטריצות A,B ב- $M_{mxn}[R]$, נגדיר: $\langle A,B\rangle=\mathrm{tr}\left(B^TA\right)$.

בדקו האם ההגדרה לעיל מהווה מכפלה פנימית ב- $M_{mxn}[R]$.

tr מייצג את המילה trace (עקבה), כלומר, סכום איברי האלכסון.

6) לכל שתי פונקציות $f,\ g$ ב- $C[a,b]$, נגדיר: $\langle f,g\rangle=\int_a^b f\cdot g\,dx$.

בדקו האם ההגדרה לעיל מהווה מכפלה פנימית ב- $C[a,b]$.

7) נתונה מכפלה פנימית על R^3 , שעבורה הקבוצה $B=\{(1,1,0),(1,1,0),(1,0,0)\}$
מהווה בסיס אורתונורמלי.
חשבו את המכפלה הפנימית של שני וקטורים כלליים
$\langle (x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)\rangle$.

תשובות סופיות

1) ההגדרה לא מהווה מכפלה פנימית.
2) $k>9$
3) $-1<k<1$
4) עבור $k_i=1$ לכל $1\le i\le n$, נקבל את המכפלה הפנימית הסטנדרטית.
5) ההגדרה מהווה מכפלה פנימית ב- $M_{mxn}[R]$.
6) ההגדרה מהווה מכפלה פנימית ב- $C[a,b]$.
7) $(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{pmatrix}$

הנורמה והמרחק

שאלות

1) נתונים שלושה וקטורים ב- $\mathbb{R}^3$: $u=(1,-2,2),\ v=(3,-2,6),\ w=(5,3,-2)$.

בהתייחס למכפלה הפנימית הרגילה ב- $\mathbb{R}^3$, חשבו :

א. $\langle u,v\rangle$　ב. $\langle u,w\rangle$　ג. $\langle v,w\rangle$　ד. $\langle u+v,w\rangle$

ה. $\|u\|$　ו. $\|v\|$　ז. $\|u+v\|$　ח. $\mathrm{d}(u,v)$

ט. $\hat{u}$　י. $\hat{v}$

2) נתונות שלוש מטריצות ב- $M_{2\times3}[R]$:

$$A=\begin{pmatrix}10&9&8\\7&6&5\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}2&3&4\\5&6&7\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}3&-5&2\\1&0&-4\end{pmatrix}.$$

בהתייחס למכפלה הפנימית $\langle A,B\rangle=\mathrm{tr}\left(B^TA\right)$ ב- $M_{2\times3}[R]$,

חשבו :

א. $\langle A,B\rangle$　ב. $\langle A,C\rangle$　ג. $\langle A,B+C\rangle$

ד. $\langle B,C\rangle$　ה. $\langle 4A+10B,\ 11C\rangle$　ו. $\|A\|$

ז. $\|B\|$　ח. $\mathrm{d}(A,B)$　ט. $\hat{A}$

3) נתונים שלושה פולינומים ב- $C[0,1]$:

$$p(x)=x+3,\ \ q(x)=3x+1,\ \ r(x)=x^2-4x-1$$

בהתייחס למכפלה הפנימית : $\langle p,q\rangle=\int_0^1 p(x)\cdot q(x)dx$,

חשבו :

א. $\langle p,q\rangle$　ב. $\langle p,r\rangle$　ג. $\langle p,q+r\rangle$

ד. $\|p\|$　ה. $\mathrm{d}(p,q)$　ו. $\hat{r}$

4) הוכיחו: $\|u+v\|^2=\|u\|^2+2\langle u,v\rangle+\|v\|^2$.

5) הוכיחו: $\|u-v\|^2=\|u\|^2-2\langle u,v\rangle+\|v\|^2$.

6) הוכיחו: $\langle u-v,u+v\rangle=\|u\|^2-\|v\|^2$.

7) הוכיחו: $\|u+v\|^2+\|u-v\|^2=+2\|u\|^2+2\|v\|^2$.

8) הוכיחו: $\frac{1}{4}\left(\|u+v\|^2-\|u-v\|^2\right)=\langle u,v\rangle$.

9) יהי V ממ"פ ויהיו $u,v\in V$ וקטורים המקיימים: $\|u\|=a,\ \|u+v\|=b,\ \|u-v\|=c$.
מצאו את $\|v\|$ ואת $\langle u,v\rangle$.

תשובות סופיות

1) א. 19 ב. -5 ג. -3 ד. -8
ה. 3 ו. 7 ז. $\sqrt{96}$ ח. $\sqrt{20}$
ט. $\left(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$ י. $\left(\frac{3}{7},-\frac{2}{7},\frac{6}{7}\right)$

2) א. 185 ב. -12 ג. 173 ד. -24 ה. -3168
ו. $\sqrt{355}$ ז. $\sqrt{139}$ ח. $\sqrt{124}$ ט. $\frac{1}{\sqrt{355}}\begin{pmatrix}3&-5&2\\1&0&-4\end{pmatrix}$

3) א. 9 ב. -9.5833 ג. -0.5833 ד. $\sqrt{\frac{37}{3}}$
ה. $\sqrt{\frac{4}{3}}$ ו. $\frac{x^2-4x-1}{\sqrt{7\frac{13}{15}}}$

4) שאלת הוכחה.
5) שאלת הוכחה.
6) שאלת הוכחה.
7) שאלת הוכחה.
8) שאלת הוכחה.
9) $\langle u,v\rangle=\frac{b^2-c^2}{4}$, $\|v\|=\sqrt{\frac{b^2+c^2-2a^2}{2}}$

אי שוויון קושי-שוורץ, יישומים

שאלות

1) הוכיחו כי אם u,v תלויים לינארית, אז $|\langle u,v\rangle|=\|u\|\cdot\|v\|$.

2) יהיו $x_1,x_2,\dots,x_n$ ו- $y_1,y_2,\dots,y_n$ מספרים ממשיים.
הוכיחו כי $(x_1y_1+x_2y_2+\dots+x_ny_n)^2\le(x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2)(y_1^2+y_2^2+\dots+y_n^2)$.

3) יהיו f,g פונקציות רציפות בקטע הסגור $[a,b]$.
הוכיחו כי $\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2\le\left(\int_a^b f^2(x)\right)\left(\int_a^b g^2(x)\right)$.

4) ענו על הסעיפים הבאים:
א. נניח כי $u=(u_1,\dots,u_n),\ v=(v_1,\dots,v_n)$ שני וקטורי יחידה ב- R^n.
הוכיחו כי $|u_1v_1+\dots+u_nv_n|\le1$.
ב. נניח ש- $u=(u_1,\dots,u_n)\in R^n$.
הוכיחו כי $(u_1+\dots+u_n)^n\le n(u_1^2+\dots+u_n^2)$.

5) נניח ש- $a_1,a_2,\dots,a_n$ מספרים חיוביים כך ש- $a_1+a_2+\dots+a_n=1$.
הוכיחו כי $\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}+\dots+\sqrt{a_n}\le\sqrt{n}$.

6) הוכיחו את אי השוויון $\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n}}\le\sqrt{\frac{n^2+n}{2}}$.

7) נתון כי $\sum_{i=1}^{n}a_i=1$.
הוכיחו כי $\frac{a_1^2}{a_1+a_2}+\frac{a_2^2}{a_2+a_3}+\dots+\frac{a_n^2}{a_n+a_1}\ge\frac{1}{2}$.

8) נתון כי $\sum_{i=1}^{n} b_i = \sum_{i=1}^{n} a_i$.

א. הוכיחו כי $\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^2}{a_i+b_i} \ge \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} a_i$.

ב. נתון כי $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$, הוכיחו כי $\frac{a_1^2}{a_1+a_2}+\frac{a_2^2}{a_2+a_3}+\ldots+\frac{a_n^2}{a_n+a_1} \ge \frac{1}{2}$.

9) נתון כי $\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \le \sum_{i=1}^{n} a_i$.

הוכיחו כי $\sum_{i=1}^{n} a_i \le \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{b_i}$.

10) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו כי $\sum_{i=1}^{n} \frac{(a_i-b_i)^2}{a_i+b_i} \ge \frac{\left(\sum_{i=1}^{n}(a_i-b_i)\right)^2}{\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)}$.

ב. הוכיחו כי $\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i b_i}{a_i+b_i} \le \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{i=1}^{n} b_i}{\sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i}$.

11) חשבו את הזווית בין שני הווקטורים $v=(-2,1,2)$, $u=(1,2,2)$,
ביחס למכפלה הפנימית הסטנדרטית ב- $\mathbb{R}^3$.

12) חשבו את הזווית בין שני הווקטורים $v=(1,2)$, $u=(3,4)$,
ביחס למכפלה הפנימית $\langle (x_1,x_2),(y_1,y_2)\rangle = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 3x_2y_2$, ב- $\mathbb{R}^2$.

13) מצאו את $\cos\theta$ עבור הזווית θ שבין $p(x)=2x-1$ ו- $q(x)=x^2$,
בהתייחס למכפלה הפנימית: $\langle p,q\rangle = \int_0^1 p(x)\cdot q(x)\,dx$ שב- $C[0,1]$.

14) מצאו את $\cos\theta$ עבור הזווית θ שבין $B=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 2 & 3\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & -1\end{pmatrix}$,
בהתייחס למכפלה הפנימית: $\langle A,B\rangle = \mathrm{tr}\left(B^T A\right)$ ב- $M_{2\times 2}[R]$.

15) יהיו $u,v\in\mathbb{R}^n$ וקטורי יחידה המקיימים $\|u-v\|=2$.
הוכיחו ש- u ו- v הם בהכרח כפולה בסקלר אחד של השני.

תשובות סופיות

1) שאלת הוכחה.
2) שאלת הוכחה.
3) שאלת הוכחה.
4) שאלת הוכחה.
5) שאלת הוכחה.
6) שאלת הוכחה.
7) שאלת הוכחה.
8) שאלת הוכחה.
9) שאלת הוכחה.
10) שאלת הוכחה.
11) $\theta=63.61^\circ$
12) $\theta=9.44^\circ$
13) $\cos\theta=0.173^\circ$
14) $\cos\theta=0.00036^\circ$
15) שאלת הוכחה.

אורתוגונליות

שאלות

1) הוכיחו כי הווקטורים $u=(1,2,3),\ \ v=(4,7,-6)$ אורתוגונליים ב- $\mathbb{R}^3$.

2) מצאו את ערכו של הקבוע k, עבורו הווקטורים $u=(1,k,3),\ \ v=(4,7,-6)$ יהיו אורתוגונליים ב- $\mathbb{R}^3$.

3) מצאו וקטור יחידה המאונך לשני הווקטורים $u=(1,2,3),\ \ v=(2,5,7)$ ב- $\mathbb{R}^3$.

4) הוכיחו כי הפולינומים $p(x)=2x-1,\ \ q(x)=6x^2-6x+1$ אורתוגונליים בקטע $[0,1]$ (ביחס למכפלה הפנימית $\langle p,q\rangle=\int_0^1 p(x)\cdot q(x)dx$).

5) במרחב $P_n[R]$ (מרחב הפולינומים ממעלה $n\geq$ מעל $\mathbb{R}$), נגדיר מכפלה פנימית:

$$\langle p(x),q(x)\rangle=\sum_{k=0}^{n}p(k)q(k)=p(0)q(0)+p(1)q(1)+\ldots+p(n)q(n).$$

הראו כי הפולינומים:

$$p(x)=x(x-2)(x-4)(x-6),\ \ q(x)=x(x-1)(x-3)(x-5)(x-7)$$

אורתוגונליים כאיברי המרחב $P_7[R]$, עם המכפלה הפנימית שהוגדרה לעיל.

6) נתונות שתי מטריצות: $B=\begin{pmatrix}4 & -1\\ 2 & 3\end{pmatrix},\ \ A=\begin{pmatrix}k & 1\\ 3 & -1\end{pmatrix}$.

בהתייחס למכפלה הפנימית: $\langle A,B\rangle=\mathrm{tr}(B^TA)$ ב- $M_{2\times2}[R]$,

מצאו את הערך של הקבוע k, עבורו המטריצות הנ"ל אורתוגונליות.

7) הוכיחו כי: $u\perp v\Leftrightarrow\|u+v\|=\|u-v\|$.

מהו הפירוש הגיאומטרי של תכונה זו ב- $\mathbb{R}^2$?

8) הוכיחו כי: $u\perp v\Leftrightarrow\|u+v\|^2=\|u\|^2+\|v\|^2$.

מהו הפירוש הגיאומטרי של תכונה זו?

9) הוכיחו כי : $\|u\|=\|v\| \Leftarrow (u+v)\perp(u-v)$.
מהו הפירוש הגיאומטרי של תכונה זו?

10) מצאו וקטור שמאונך לשני הווקטורים $(3,2,1)$ ו- $(1,-1,2)$,
ושמרחקו מהווקטור $(1,1,0)$ הוא $\sqrt{3}$.

11) יהיו $u,v\in\mathbb{R}^n$ וקטורים שונים מ- 0, אורתוגונליים זה לזה ובעלי אותה נורמה.
נגדיר $a=u-2v,\ b=3u+v$.
אם α היא הזווית בין a ל- b, אז $\cos\alpha$ שווה ל-?

12) יהיו $w_1,w_2\in\mathbb{R}^n$ וקטורים שונים מ- 0, אורתוגונליים זה לזה ובעלי נורמה k.
יהי $v=\alpha w_1+\frac{3}{4}w_2$ וקטור שמרחקו מ- $2w_2$ שווה למרחקו מ- w_1.
מהו המרחק של v מ- w_1?

תשובות סופיות

1) שאלת הוכחה.

2) $k=2$

3) $\left(\frac{-1}{\sqrt{3}},\frac{-1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

4) שאלת הוכחה.

5) שאלת הוכחה.

6) $k=0.5$

7) שאלת הוכחה.

8) שאלת הוכחה.

9) שאלת הוכחה.

10) $v=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ or $v=\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

11) $\frac{1}{\sqrt{50}}$

12) $\frac{5}{4}k$

משלים אורתוגונלי

שאלות

1) יהי $W=span\{(1,2,-1,1),(2,5,3,1)\}$.
מצא בסיס וממד עבור $W^{\perp}$.
הראו כי מתקיים משפט הפירוק.

2) יהי $w=span\{(1,1,1)\}$.
מצא בסיס וממד עבור $W^{\perp}$.
הראו כי מתקיים משפט הפירוק.

3) יהי $W=span\{x\}\subseteq P_2[R]$.
מצאו בסיס וממד עבור $W^{\perp}$, ביחס למכפלה הפנימית האינטגרלית בקטע $[0,1]$.

4) יהי $W=span\{x,x^2\}\subseteq P_2[R]$.
מצאו בסיס וממד עבור $W^{\perp}$, ביחס למכפלה הפנימית האינטגרלית בקטע $[0,1]$.

5) יהי $W=span\left\{\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\right\}\subseteq M_{2\times2}[R]$.
מצאו בסיס וממד עבור $W^{\perp}$, ביחס למכפלה הפנימית $\langle A,B\rangle=\mathrm{tr}\left(B^TA\right)$
ב- $M_{2\times2}[R]$.

6) מצאו בסיס למשלים האורתוגונלי של מרחב המטריצות האלכסוניות מסדר 3.

7) מצאו בסיס למשלים האורתוגונלי של מרחב המטריצות הסימטריות מסדר 2.

8) נתונה מערכת משוואות הומוגנית $A\cdot \underline{x}=0$.
יהי U מרחב הפתרונות של המערכת.
תנו פירוש אפשרי ל- U בעזרת המושג משלים אורתוגונלי,
והמושג מרחב השורות של המטריצה A.

9) נניח ש- W_1,W_2 הן תת קבוצות של V.
הוכיחו כי: $W_1\subseteq W_2\Rightarrow W_2^{\perp}\subseteq W_1^{\perp}$.

10) נניח ש- W הוא תת קבוצה של V.
הוכיחו כי: $W \subseteq W^{\perp\perp}$.

11) נניח ש- W הוא תת קבוצה של V.
הוכיחו כי: $W = W^{\perp\perp}$ (אם V ממימד סופי).

12) נניח ש- W_1, W_2 הן תת קבוצות של V.
הוכיחו כי: $(W_1 + W_2)^{\perp} = W_1^{\perp} \cap W_2^{\perp}$.

13) נניח ש- W_1, W_2 הן תת קבוצות של V.
הוכיחו כי: $(W_1 \cap W_2)^{\perp} = W_1^{\perp} + W_2^{\perp}$.

תשובות סופיות

1) $W^{\perp} = span\{(-3,1,0,1),(11,-5,1,0)\}$

2) $W^{\perp} = span\{(-1,0,1),(-1,1,0)\}$

3) $W^{\perp} = span\left\{\left(-\frac{2}{3}+x\right),\left(-\frac{1}{2}+x^2\right)\right\}$

4) $W^{\perp} = span\{(1.5x^2-6x+5)\}$

5) $W^{\perp} = span\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\right\}$

6) $$B_W = \left(\begin{matrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\end{matrix}\right)$$

7) $B_{W^{\perp}} = \left\{\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\right\}$

8) הסבר בווידאו.

9) שאלת הוכחה.

10) שאלת הוכחה.

11) שאלת הוכחה.

12) שאלת הוכחה.

13) שאלת הוכחה.

אנליזה מתמטית

פרק 17 - קבוצות אורתוגונליות, בסיסים אורתוגונליים, התהליך של גרם-שמידט

תוכן העניינים

בסיס אורתונורמלי, שוויון פרסבל, אי-שוויון בסל

שאלות

1) נתונה קבוצת וקטורים $S=\{(2,1,-4),(1,2,1),(3,-2,1)\}$ ב- $\mathbb{R}^3$.

א. הראו שהקבוצה S אורתוגונלית.

ב. נרמלו את הקבוצה לקבלת קבוצה אורתונורמלית.

ג. ללא חישוב, הוכיחו שהקבוצה מהווה בסיס ל- $\mathbb{R}^3$.

2) נתונה קבוצת וקטורים $S=\{(2,1,-4),(1,2,1),(3,-2,1)\}$ ב- $\mathbb{R}^3$.
ללא דירוג, תוך שימוש במכפלות פנימיות, רשמו את הווקטור $(13,-1,7)$, כצירוף לינארי של איברי S.

3) נתונה קבוצת וקטורים $S=\{(2,1,-4),(1,2,1),(3,-2,1)\}$ ב- $\mathbb{R}^3$.
רשמו את וקטור הקואורדינטות של וקטור כלשהו $v=(a,b,c)$ ב- $\mathbb{R}^3$, ביחס לבסיס S.

4) נניח ש- $\{u_1,u_2,\dots,u_n\}$ היא בסיס אורתוגונלי ל- V.
הוכיחו שלכל $v\in V$, אז $v=\frac{\langle v,u_1\rangle}{\langle u_1,u_1\rangle}u_1+\frac{\langle v,u_2\rangle}{\langle u_2,u_2\rangle}u_2+\dots+\frac{\langle v,u_n\rangle}{\langle u_n,u_n\rangle}u_n$.

הערה: הקבוע $a_i=\frac{\langle v,u_i\rangle}{\langle u_i,u_i\rangle}$ נקרא מקדם פורייה של v ביחס ל- u_i, או הרכיב של v ביחס ל- u_i.

5) נתונה קבוצת פונקציות $S=\{\cos x,\cos 2x,\cos 3x,\dots\}$ ב- $V=C[0,\pi]$.
האם הקבוצה אורתוגונלית? אם כן, האם היא אורתונורמלית?
במידה והקבוצה אורתוגונלית ולא אורתונורמלית,
נרמלו אותה לקבלת קבוצה אורתונורמלית.
ענו ביחס למכפלה הפנימית האינטגרלית.

6) נתונה קבוצת פונקציות $S=\{1,\cos x,\sin x,\cos 2x,\sin 2x,\dots\}$ ב- $V=C[0,2\pi]$.
האם הקבוצה אורתוגונלית? אם כן, נרמלו אותה לקבלת קבוצה אורתונורמלית.
ענו ביחס למכפלה הפנימית האינטגרלית.
האם הקבוצה מהווה בסיס?

7) נתונה קבוצה $S=\{(2,4,4),(4,-1,-1),(0,2,-2)\}$ ב- $\mathbb{R}^3$.
בדקו האם הקבוצה S אורתוגונלית.
האם היא בסיס אורתוגונלי? האם היא אורתונורמלית?
האם היא בסיס אורתונורמלי?
במידה והקבוצה אורתוגונלית אך לא אורתונורמלית, נרמלו אותה.

8) נתונה קבוצה $S=\{1,x,x^2,x^3\}$ ב- $P_3[R]$.
בדקו האם הקבוצה S אורתוגונלית.
האם היא בסיס אורתוגונלי? האם היא אורתונורמלית?
האם היא בסיס אורתונורמלי?
במידה והקבוצה אורתוגונלית אך לא אורתונורמלית, נרמלו אותה.
(ענו ביחס למכפלה הפנימית האינטגרלית ב- $[0,1]$)

9) נתונה קבוצה $S=\{1,2x-1,6x^2-6x+1\}$ ב- $P_2[R]$.
בדקו האם הקבוצה S אורתוגונלית.
האם היא בסיס אורתוגונלי? האם היא אורתונורמלית?
האם היא בסיס אורתונורמלי?
במידה והקבוצה אורתוגונלית אך לא אורתונורמלית, נרמלו אותה.
(ענו ביחס למכפלה הפנימית האינטגרלית ב- $[0,1]$)

10) נתונה הקבוצה $M_3[R] \supseteq$ $S=\left\{\begin{pmatrix}2&4&6\\0&2&4\\0&0&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\right\}\subseteq M_3[R]$.
בדקו: האם הקבוצה S אורתוגונלית? האם היא בסיס אורתוגונלי?
האם היא אורתונורמלית? האם היא בסיס אורתונורמלי?
במידה והקבוצה אורתוגונלית אך לא אורתונורמלית, נרמלו אותה.
ענו ביחס למכפלה הפנימית הסטנדרטית של המטריצות.

11) נסחו והוכיחו את שוויון פרסבל.

12) ענו על הסעיפים הבאים:

א. יהי $B=\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1),\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)\right\}$ בסיס אורתונורמלי של R^2.
אמתו את שוויון פרסבל עבור וקטור כלשהו $v\in R^2$.

ב. יהי $B=\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0),\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0),(0,0,1)\right\}$ בסיס אורתונורמלי של R^3.
אמתו את שוויון פרסבל עבור וקטור כלשהו $v\in R^3$.

13) יהי $D=\left\{A_1=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}, A_2=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}, A_3=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}, A_4=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\right\}$.

א. הוכיחו ש- D מהווה בסיס אורתונורמלי של $M_2(R)$ עם המכפלה הפנימית $\langle A,B\rangle = tr\left(B^T A\right)$.

ב. כתבו את שוויון פרסבל עבור מטריצה כללית $A\in M_2(R)$ עם המכפלה הפנימית לעיל.

14) במרחב $C([-\pi,\pi])$ של כל הפונקציות הרציפות בקטע $[-\pi,\pi]$ נגדיר את המכפלה הפנימית הבאה $\langle f,g\rangle=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$.

תהי $\{f_1(x)=\cos x,\ f_2(x)=\sin x\}$ מערכת אורתונורמלית במרחב זה.

אמתו את אי שוויון בסל עבור הפונקציה $f(x)=\begin{cases} x & x\ge 0\\ 0 & x<0\end{cases}$ ביחס למערכת הנתונה.

15) במרחב $C([-\pi,\pi])$ של כל הפונקציות הרציפות בקטע $[-\pi,\pi]$ נגדיר את המכפלה הפנימית הבאה $\langle f,g\rangle=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$.

תהי $\{f_1=\sin x, f_2=\sin(2x),\dots, f_{60}=\sin(60x)\}$ מערכת אורתונורמלית במרחב זה.

כתבו את אי שוויון בסל עבור הפונקציה $f(x)=\begin{cases} -1 & -\pi<x<0\\ 0 & x=0\\ 1 & 0<x<\pi\end{cases}$ ביחס למערכת הנתונה.

תשובות סופיות

1) א. שאלת הוכחה. ב. $S\left\{\frac{(2,1,-4)}{\sqrt{2^2+1^2+(-4)^2}},\frac{(1,2,1)}{\sqrt{6}},\frac{(3,-2,1)}{\sqrt{14}}\right\}$

ג. שאלת הוכחה.

2) $(13,-1,7)=\frac{-1}{7}(2,1,4)+3(1,2,1)+\frac{24}{7}(3,-2,1)$

3) $\frac{2a+b-4c}{21}(2,1,4)+\frac{a+2b+c}{6}(1,2,1)+\frac{3a-2b+c}{14}(3,-2,1)$

4) שאלת הוכחה.

5) הקבוצה אורתוגונלית, הקבוצה לא אורתונורמלית,

$$S=\left\{\frac{\cos x}{\sqrt{0.5\pi}},\frac{\cos 2x}{\sqrt{0.5\pi}},\frac{\cos 3x}{\sqrt{0.5\pi}},\ldots\right\}$$

6) הקבוצה אורתוגונלית, הקבוצה לא אורתונורמלית,

$$S=\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\frac{\cos x}{\sqrt{\pi}},\frac{\sin x}{\sqrt{\pi}},\frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}},\frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}},\ldots\right\}$$

7) הקבוצה אורתוגונלית, הקבוצה מהווה בסיס אורתוגונלי, הקבוצה אינה אורתונורמלית, $S=\left\{\frac{1}{\sqrt{36}}(2,4,4),\frac{1}{\sqrt{8}}(4,-1,-1),\frac{1}{\sqrt{18}}(0,2,-2)\right\}$

8) הקבוצה לא אורתוגונלית.

9) הקבוצה אורתוגונלית, הקבוצה מהווה בסיס אורתוגונלי,

$$S=\left\{1,\sqrt{3}(2x-1),\sqrt{5}\left(6x^2-6x+1\right)\right\}$$

10) הקבוצה אורתוגונלית, הקבוצה אינה בסיס אורתוגונלי, הקבוצה לא אורתונורמלית, $S=\left\{\frac{1}{\sqrt{80}}\begin{pmatrix}2&4&6\\0&2&4\\0&0&2\end{pmatrix},\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\right\}$

11) שאלת הוכחה.

12) שאלת הוכחה.

13) שאלת הוכחה.

14) שאלת הוכחה.

15) $2\geq\frac{16}{\pi^2}\left[\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots+\frac{1}{59^2}\right]$

ההיטל של וקטור

שאלות

1) מצאו את מקדם פורייה c ואת ההיטל של $v=(1,2,2)$ לאורך $w=(0,1,-1)$, ב- $\mathbb{R}^3$.

2) מצאו את מקדם פורייה c ואת ההיטל של $v=(1,-2,2,0)$ לאורך $w=(0,2,-1,2)$, ב- $\mathbb{R}^4$.
מקובל לסמן גם $\operatorname{proj}(v,w)$.

3) מצאו את מקדם פורייה c ואת ההיטל של $p(x)=2x-1$ לאורך $q(x)=x^2$, במרחב הפולינומים עם המכפלה הפנימית האינטגרלית ב- $[0,1]$.

4) מצאו את מקדם פורייה c ואת ההיטל של $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$ לאורך $B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 0\end{pmatrix}$, במרחב המטריצות הממשיות מסדר 2 עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית.

5) יהי $V=R^3$ ויהי $W=span\{w_1=(1,2,1),w_2=(1,-11)\}$ תת מרחב של V.
מצאו את ההיטל של הווקטור $v=(-2,2,2)$ על תת המרחב W לפי המכפלה הפנימית הסטנדרטית ב- $V=R^3$.
בנוסף, רשמו את v כסכום $v=v_{\|}+v_{\perp}$, כאשר $v_{\|}\in W,\ v_{\perp}\in W^{\perp}$.

6) יהי $V=R^4$ עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית.
ויהי $W=span\{w_1=(1,1,0,-1),w_2=(1,0,11),w_3=(0,-1,1,-1)\}$ תת מרחב של V.
מצאו את הווקטור הקרוב ביותר לווקטור $v=(3,4,5,6)$ בתת המרחב W.
בנוסף, כתבו את v כסכום של וקטור מ- W ווקטור מ- $W^{\perp}$.

7) יהי $V=C([0,1])$ מרחב הפונקציות הרציפות על הקטע $[0,1]$.
ויהי $W=span\left\{w_1=1,w_2=x-\frac{1}{2}\right\}$ תת מרחב של V.
מצאו את ההיטל של $v=4x^2-4$ על W עם המכפלה הפנימית האינטגרלית הסטנדרטית. בנוסף, כתבו את v כסכום של וקטור מ- W ווקטור מ- $W^{\perp}$.

8) נתון המרחב $C([-1,1])$ עם המכפלה הפנימית $\langle f,g\rangle=\int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$.

נגדיר תת מרחב של $C([-1,1])$: $W=sp\{f_1=|x|+x, f_2=|x|-x\}$.

מצאו את ההיטל של $f(x)=x^2$ על W.

9) נתון המרחב $C([-\pi,\pi])$ עם המכפלה הפנימית $\langle f,g\rangle=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$.

נגדיר תת מרחב של $C([-\pi,\pi])$:

$W=sp\{f_1=\sin x, f_2=\sin(2x),..., f_{60}=\sin(60x)\}$.

ידוע שהקבוצה $\{f_i\}_{i=1}^{60}$ היא קבוצה אורתונורמלית.

מצאו את ההיטל של $f(x)=\begin{cases}-1 & -\pi<x<0\\ 0 & x=0\\ 1 & 0<x<\pi\end{cases}$ על W.

תשובות סופיות

1) $\operatorname{proj}(v,w)=cw=0,\quad c=0$

2) $\operatorname{proj}(v,w)=cw=-\frac{2}{3}(0,2,-1,2),\quad c=\frac{-2}{3}$

3) $\operatorname{proj}(p,q)=c\cdot q(x)=\frac{5}{6}x^2,\quad c=\frac{5}{6}$

4) $\operatorname{proj}(A,B)=cB=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 0\end{pmatrix},\quad c=\frac{1}{6}$

5) $v=v_{\|}+v_{\perp}=(0,2,0)+(-2,0,2)\ ,\pi(v)=(0,2,0)$

6) $(3,4,5,6)=v_{\|}+v_{\perp}=(5,2,3,6)+(-2,2,2,0)\ ,\pi(v)=(5,2,3,6)$

7) $v=v_{\|}+v_{\perp}=\left(-\frac{14}{3}+4x\right)+\left(4x^2-4x+\frac{2}{3}\right)\ ,\pi(v)=-\frac{14}{3}+4x$

8) $proj_W f=\frac{3}{4}|x|$

9) $proj_W f=\frac{4\sin(x)}{\pi}+\frac{4\sin(3x)}{3\pi}+\frac{4\sin(5x)}{5\pi}+\ldots+\frac{4\sin(59x)}{59\pi}$

תהליך גרם-שמידט

שאלות

1) נתון: $U = span\{(1,2,3),(4,5,6),(7,8,9)\} \subseteq \mathbb{R}^3$.
מצאו בסיס אורתונורמלי ל- U.

2) נתון: $U = span\{(2,2,2,2),(1,1,2,4),(1,2,-4,-3)\} \subseteq \mathbb{R}^4$.
מצאו בסיס אורתונורמלי ל- U.

3) נתון: $U = span\{4,x,x^2,x^3\} \subseteq P_3[x]$.
מצאו בסיס אורתונורמלי ל- U,
בהתייחס למכפלה הפנימית האינטגרלית בקטע $[-1,1]$.

4) נתון: $U = span\left\{\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&2\\-1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&2\\1&1\end{pmatrix}\right\} \subseteq M_2[R]$.
מצאו בסיס אורתונורמלי ל- U,
בהתייחס למכפלה הפנימית הרגילה של המטריצות.

תשובות סופיות

1) $$B_{orthonormal} = \left\{\frac{1}{\sqrt{15}}(1,2,3),\frac{1}{\sqrt{21}}(-4,-1,2)\right\}$$

2) $$B_{orthonormal} = \left\{w_1 = \frac{(2,2,2,2)}{\sqrt{16}}, w_2 = \frac{(-1,-1,0,2)}{\sqrt{6}}, w_3 = \frac{(1,3,-6,2)}{\sqrt{50}}\right\}$$

3) $$B_{orthonormal} = \left\{\hat{w}_1 = \frac{4}{\sqrt{32}}, \hat{w}_2 = \frac{x}{\sqrt{\frac{2}{3}}}, \hat{w}_3 = \frac{3x^2-1}{\sqrt{\frac{8}{5}}}, \hat{w}_4 = \frac{5x^3-3x}{\sqrt{\frac{8}{7}}}\right\}$$

4) $$B_{orthonormal} = \left\{\hat{w}_1 = \frac{\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}}{\sqrt{30}}, \hat{w}_2 = \frac{\begin{pmatrix}7&14\\-9&-2\end{pmatrix}}{\sqrt{330}}, \hat{w}_3 = \frac{\begin{pmatrix}-4&3\\2&-2\end{pmatrix}}{\sqrt{33}}\right\}$$

אנליזה מתמטית

פרק 18 - מטריצות אורתוגונליות, העתקות אורתוגונליות, לכסון אורתוגונלי

תוכן העניינים

מטריצות אורתוגונליות

שאלות

1) ציינו אילו מבין המטריצות הבאות הן אורתוגונליות.
במידה והמטריצה אורתוגונלית, מצא עבורה את המטריצה ההופכית:

א. $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$

ב. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

ג. $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

2) הוכיחו את המשפטים הבאים:

א. מטריצה ריבועית A היא אורתוגונלית אם ורק אם $A^T A = I$.

ב. מטריצה אורתוגונלית A היא הפיכה ומתקיים $A^{-1} = A^T$.

3) ענו על הסעיפים הבאים:

א. תהי A מטריצה אורתוגונלית.
הוכיחו כי המטריצות A^{-1}, A^T אורתוגונליות.

ב. הוכיחו כי מכפלת מטריצות אורתוגונליות (מאותו סדר),
היא מטריצה אורתוגונלית.

ג. הוכיחו שהדטרמיננטה של מטריצה אורתוגונלית היא 1 או -1.

ד. האם סכום מטריצות אורתוגונליות הוא בהכרח מטריצה אורתוגונלית?

ה. האם מכפלה של מטריצה אורתוגונלית בסקלר היא בהכרח מטריצה
אורתוגונלית?

ו. הראו כי אם מטריצה אורתוגונלית היא משולשת, אז היא אלכסונית.

4) תהי A מטריצה מסדר n.
הוכיחו או הפריכו:

א. עמודותיה של המטריצה A מהוות בסיס אורתונורמלי ל- R^n,
אם ורק אם שורותיה מהוות בסיס אורתונורמלי ל- R^n.

ב. עמודותיה של המטריצה A מהוות בסיס אורתוגונלי ל- R^n,
אם ורק אם שורותיה מהוות בסיס אורתוגונלי ל- R^n.

5) ענו על הסעיפים הבאים:

א. תהי A מטריצה מסדר n, אשר עמודותיה, $\{v_1,...,v_n\}$,
מהוות בסיס **אורתוגונלי** ל- R^n. נסמן $v_i v_i = \lambda_i$.
הוכיחו כי $A^T A = \operatorname{diag}\{\lambda_1,...,\lambda_n\}$.

ב. הוכיחו: כדי להפוך מטריצה שעמודותיה מהוות בסיס אורתוגונלי,
יש לחלק כל עמודה בסכום ריבועי איבריה ולשחלף לאחר מכן.

ג. הפכו את המטריצה $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\ 0 & 4 & 0\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

ד. הפכו את המטריצה $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & \sqrt{2}\\ 2 & 2 & -\sqrt{8}\\ -\sqrt{0.5} & \sqrt{0.5} & 0\end{pmatrix}$.

6) הוכיחו את המשפט:

יהיו B ו- C שני בסיסים אורתונורמליים של המרחב R^n.
אז מטריצת המעבר מ- B ל- C היא מטריצה אורתוגונלית.

7) ענו על הסעיפים הבאים:

א. תהי A מטריצת המעבר מבסיס אורתונורמלי B לבסיס C,
של המרחב R^n.
הוכיחו כי אם A מטריצה אורתוגונלית, אז הבסיס C גם אורתונורמלי.

ב. תהי A מטריצת המעבר מבסיס B לבסיס אורתונורמלי C,
של המרחב R^n.
הוכיחו כי אם A מטריצה אורתוגונלית, אז הבסיס B גם אורתונורמלי.

8) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו כי אם A מטריצה אורתוגונלית מסדר n,
אז קיימים שני בסיסים אורתונורמליים B ו- C, של המרחב R^n,
כך ש- A משמשת מטריצת המעבר מ- B ל- C.

ב. יהי $v \in R^n$, כך ש- $\|v\|=1$.
הוכיחו שקיימת מטריצה אורתוגונלית, שהעמודה הראשונה שלה היא
הווקטור v.

9) תהי $A\in M_n(\mathbb{R})$ אורתוגונלית וסימטרית.
נגדיר $B=I+A$.
א. הוכיחו כי $B^2=2B$.
ב. ידוע ש- $|B|=1024$.
מצאו את n.

10) ענו על הסעיפים הבאים:
א. מצאו את מטריצת הסיבוב בזווית 30^0 ב- R^2.
ב. מצאו את מטריצת השיקוף ביחס לישר $y=\frac{1}{\sqrt{3}}x$ ב- R^2.
ג. מצאו את מטריצת השיקוף ביחס לישר $y=\sqrt{3}x$ ב- R^2.

11) בכל אחד מהסעיפים הבאים תארו את פעולת המטריצה מבחינה גיאומטרית. השתמשו במושגים שיקוף וסיבוב.
א. $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$
ב. $\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \end{pmatrix}$
ג. $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

12) הוכיחו שהמטריצה $R=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ מסובבת וקטור במישור ב- θ מעלות נגד כיוון השעון, כאשר $0\le\theta\le\pi$.
כלומר, הוכיחו שהזווית בין כל וקטור $v\in\mathbb{R}^2$ לבין Rv היא θ.

13) נסמן: $\text{Ref}_{\theta/2}=\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$, $\text{Rot}_\theta=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.
הוכיחו כי:
א. $\text{Rot}_\theta\cdot\text{Rot}_\phi=\text{Rot}_{\theta+\phi}$
ב. $\text{Ref}_{\theta/2}\cdot\text{Ref}_{\phi/2}=\text{Rot}_{\theta-\phi}$

14) תהי $A_{2\times2}(\mathbb{R})$ מטריצה אורתוגונלית.
הוכיחו ש- A היא בהכרח מטריצת סיבוב או מטריצת שיקוף.

15) יהי $v_{n\times1}\in\mathbb{R}^n$ וקטור יחידה.
נגדיר מטריצה $H_{n\times n}$ על ידי: $H=I-2v\cdot v^T$ (נקראת גם מטריצת האוסהולדר).
הוכיחו:
א. H מטריצה סימטרית.
ב. H מטריצה אורתוגונלית ו- $H^2=I$.
ג. המטריצה H עבור $v=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$ היא מטריצת שיקוף ביחס לישר $y=-x$.

תשובות סופיות

1) א. $A^{-1}=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix}$ ב. $B^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha\\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$

ג. לא אורתוגונלית.

2) שאלת הוכחה.

3) שאלת הוכחה.

4) שאלת הוכחה.

5) א. שאלת הוכחה. ב. שאלת הוכחה.

ג. $A^{-1}=\begin{pmatrix}0.2 & 0 & 0.4\\ 0 & 0.25 & 0\\ -0.4 & 0 & 0.2\end{pmatrix}$ ד. $A^{-1}=\begin{pmatrix}0.25 & 0.125 & -\sqrt{0.5}\\ 0.25 & 0.125 & \sqrt{0.5}\\ \sqrt{0.125} & -\sqrt{0.125} & 0\end{pmatrix}$

6) שאלת הוכחה.

7) שאלת הוכחה.

8) שאלת הוכחה.

9) א. שאלת הוכחה. ב. $n=10$

10) א. $\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}$ ב. $\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ ג. $\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$

11) א. המטריצה מתארת שיקוף ביחס לישר $y=0.4142x$.

ב. המטריצה מתארת שיקוף ביחס לישר $y=\frac{1}{2}x$.

ג. המטריצה מתארת סיבוב של 90° במישור.

12) שאלת הוכחה.

13) שאלת הוכחה.

14) שאלת הוכחה.

15) שאלת הוכחה.

העתקות אורתוגונליות

שאלות

1) תהי $T:R^n \to R^n$ העתקה לינארית.
הוכיחו את המשפט: T אורתוגונלית $\Leftrightarrow$ $\forall u \in R^n \quad \|T(u)\| = \|u\|$.

2) תהי $T:R^n \to R^n$ העתקה לינארית אורתוגונלית.
א. הוכיחו כי T איזומורפיזם.
ב. הוכיחו כי גם T^{-1} אורתוגונלית.

3) ענו על הסעיפים הבאים:
א. תהי A מטריצה אורתוגונלית מסדר n.
נגדיר העתקה לינארית $T:R^n \to R^n$, על ידי $T(u) = Au$.
הוכיחו כי T היא העתקה אורתוגונלית.
ב. הוכיחו שכל העתקה אורתוגונלית $T:R^n \to R^n$,
ניתן להציג בצורה $T(u) = Au$, כאשר A אורתוגונלית.

4) ענו על הסעיפים הבאים:
א. הוכיחו שהערכים העצמיים היחידים של **העתקה** אורתוגונלית הם ± 1.
ב. הוכיחו שהערכים העצמיים היחידים של **מטריצה** אורתוגונלית הם ± 1.

5) הוכיחו שמכפלת העתקות אורתוגונליות היא העתקה אורתוגונלית.

6) ענו על הסעיפים הבאים:
א. תהי $T:R^n \to R^n$ העתקה אורתוגונלית,
ויהי $\{u_1,\dots,u_n\}$ בסיס אורתונורמלי כלשהו של R^n.
הוכיחו ש- $\{T(u_1),\dots,T(u_n)\}$ אף הוא בסיס אורתונורמלי של R^n.
ב. תהי $T:R^n \to R^n$ העתקה לינארית,
ונניח שיש בסיס אורתונורמלי $\{u_1,\dots,u_n\}$ של R^n,
כך שגם הקבוצה $\{T(u_1),\dots,T(u_n)\}$ מהווה בסיס אורתונורמלי של R^n.
הוכיחו כי T היא העתקה אורתוגונלית.

7) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו שמטריצה, שמייצגת העתקה אורתוגונלית לפי בסיס אורתונורמלי, היא בהכרח מטריצה אורתוגונלית.

ב. הוכיחו שכל העתקה ליניארית, שהמטריצה המייצגת שלה בבסיס אורתונורמלי כלשהו היא אורתוגונלית, היא בהכרח העתקה אורתוגונלית.

8) בכל אחד מהסעיפים הבאים רשמו את הנוסחה עבור ההעתקה T:

א. $T:R^2 \to R^2$ העתקת השיקוף ביחס לישר $y=\frac{1}{\sqrt{3}}x$.

ב. $T:R^2 \to R^2$ העתקת השיקוף ביחס לישר $y=\sqrt{3}x$.

ג. $T:R^2 \to R^2$ העתקת הסיבוב בזווית 30^0 ב- R^2.

9) בכל אחד מהסעיפים הבאים תארו את פעולת ההעתקה מבחינה גיאומטרית. השתמשו במושגים שיקוף וסיבוב.

א. $T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

ב. $T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{3}{5} & \frac{4}{5}\\ \frac{4}{5} & -\frac{3}{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

ג. $T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

ד. $T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{4}{5} & -\frac{3}{5}\\ -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

* את סעיף ד' פתרו בשתי דרכים שונות.

10) תהי $T:R^2 \to R^2$ העתקה ליניארית, שמסובבת וקטור ב- θ מעלות נגד כיוון השעון. מצאו נוסחה עבור ההעתקה T.

11) תהי $T:R^2 \to R^2$ העתקת השיקוף ביחס לישר $y=\tan\frac{\theta}{2}x$.

מצאו נוסחה עבור ההעתקה T.

12) תהי $T:R^2 \to R^2$ העתקה אורתוגונלית.
הוכיחו ש- T היא בהכרח העתקת סיבוב, או העתקת שיקוף.

תשובות

1) שאלת הוכחה.
2) שאלת הוכחה.
3) שאלת הוכחה.
4) שאלת הוכחה.
5) שאלת הוכחה.
6) שאלת הוכחה.
7) שאלת הוכחה.
8) א. $T(x,y)=\left(\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y,\frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{1}{2}y\right)$ ב. $T(x,y)=\left(-\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y,\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}y\right)$

ג. $T(x,y)=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{1}{2}y,\frac{1}{2}x+\frac{\sqrt{3}}{2}y\right)$

9) א. שיקוף ביחס לישר $y=0.4142x$. ב. שיקוף ביחס לישר $y=\frac{1}{2}x$.

ג. סיבוב של 90 מעלות במישור.

ד. דרך I: סיבוב של 90 מעלות ולאחריו שיקוף ביחס לישר $y=\frac{1}{2}x$.

דרך II: שיקוף ביחס לישר $y=-\frac{1}{3}x$.

10) $T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

11) $T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$

12) שאלת הוכחה.

דמיון ולכסון אורתוגונלי

שאלות

1) A,B,C מטריצות ריבועיות.

הוכיחו את התכונות הבאות של יחס הדמיון האורתוגונלי:

א. A דומה אורתוגונלית לעצמה (רפלקסיביות).

ב. אם A דומה אורתוגונלית ל- B אז B דומה אורתוגונלית ל- A (סימטריות).

ג. אם A דומה אורתוגונלית ל- B ו- B דומה אורתוגונלית ל- C אז A דומה אורתוגונלית ל- C (טרנזיטיביות).

2) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו שמטריצה סימטרית יכולה להיות דומה אורתוגונלית רק למטריצה סימטרית.

ב. הביאו דוגמה לשתי מטריצות דומות שאינן דומות אורתוגונלית.

3) לכסנו אורתוגונלית את המטריצה $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

כלומר, מצאו מטריצה אורתוגונלית P, כך ש- $P^T AP = D_{iagonal}$.

4) לכסנו אורתוגונלית את המטריצה $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

כלומר, מצאו מטריצה אורתוגונלית P, כך ש- $P^T AP = D_{iagonal}$.

5) לכסנו אורתוגונלית את המטריצה $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

כלומר, מצא מטריצה אורתוגונלית P, כך ש- $P^T AP = D_{iagonal}$.

תשובות סופיות

1) שאלת הוכחה.

2) א. שאלת הוכחה. ב. $A=\begin{pmatrix}1&2\\2&4\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1&1\\4&4\end{pmatrix}$

3) $D=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-3\end{pmatrix}$, $P=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{-1}{\sqrt{6}}&\frac{-2}{\sqrt{48}}&\frac{1}{2}\\0&\frac{2}{\sqrt{6}}&\frac{-2}{\sqrt{48}}&\frac{1}{2}\\0&0&\frac{6}{\sqrt{48}}&\frac{1}{2}\\\frac{-1}{\sqrt{2}}&\frac{-1}{\sqrt{6}}&\frac{-2}{\sqrt{48}}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

4) $D=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&3\end{pmatrix}$ $P=\begin{pmatrix}\frac{-1}{\sqrt{2}}&\frac{-1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\0&\frac{2}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{-1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$

5) $D=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&4&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, $P=\begin{pmatrix}\frac{-1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\0&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{-2}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$

אנליזה מתמטית

פרק 19 - שיטת הריבועים הפחותים - רגרסיה לינארית

תוכן העניינים

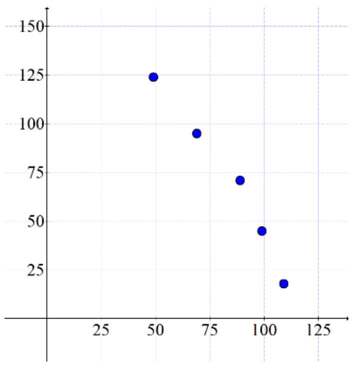
שיטת הריבועים הפחותים – רגרסיה לינארית

שאלות

1) נתונות חמש נקודות במישור: $(-4,-1),\ (-2,0),\ (2,4),\ (4,5),\ (5,6)$.
מצאו את הישר הקרוב ביותר לנקודות הללו במובן הריבועים הפחותים.

2) בטבלה הבאה הביקוש של מוצר מסוים ביחס למחיר שלו בתקופה של חודש.

$price\,(x)$	$Demand\ /\ sales\,(y)$
49$	124
69$	95
89$	71
99$	45
109$	18



א. מצא את הישר כך שסכום ריבועי המרחקים האנכיים בין הישר והנקודות יהיה מינימלי. ישר זה נקרא ישר הרגרסיה.

ב. בעזרת ישר זה נבא את הביקוש אם המחיר הוא 54$.

ג. מה משמעות השיפוע של הישר?

ד. מצא את השגיאה בחישוב הנ"ל.

3) נתונות ארבע נקודות במישור: $(4,7),\ (3,6),\ (2,6),\ (1,5)$

א. מצאו את הישר הקרוב ביותר לנקודות הללו במובן הריבועים הפחותים.

ב. מצאו את ההיטל של הווקטור $v=(5,6,6,7)$ על $W=sp\{(1,2,3,4),\ (1,1,1,1)\}$.

4) נתונות חמש נקודות במרחב: $(1,-2,3),\ (-3,2,1),\ (-1,4,5),\ (3,-4,2),\ (1,1,1)$.
מצא את המישור הקרוב ביותר לנקודות הללו במובן הריבועים הפחותים.
כלומר, כך שסכום ריבועי המרחקים האנכיים בין המישור והנקודות יהיה מינימלי.

5) ענו על הסעיפים הבאים:

א. נתונות שלוש נקודות במישור: $(1,3),\ (2,6),\ (3,11)$.
מצאו את משוואת הפרבולה הקרובה ביותר לנקודות הללו.

ב. נתונות ארבע נקודות במישור: $(0,y_1),(1,y_2),(3,y_3),(4,y_4)$
נתון כי ישר הרגרסיה של הנקודות הוא $y = x-3$.
מצאו את ההיטל של הווקטור (y_1,y_2,y_3,y_4) על המרחב
$W = sp\{(0,1,3,4),(1,1,1,1)\}$.

תשובות סופיות

1) $f(x) = 0.8x+2$

2) א. $f(x) = -1.7x+211$ ב. 119.2 יחידות.
ג. אם נעלה את המחיר של המוצר ב-1$ נצפה לירידה במכירות של 1.7 יחידות בחודש.
ד. 14.41

3) א. $f(x) = 0.6x+4.5$ ב. $(5.1,5.7,6.3,6.9)$

4) $z = 0.44x+0.41y+2.22$

5) א. $y = x^2+2$ ב. $(-3,-2,0,1)$

אנליזה מתמטית

פרק 20 - פירוקים של מטריצה (פירוק LU, פירוק SVD, פירוק QR)

תוכן העניינים

פירוק LU

שאלות

1) רשמו את פירוק LU של המטריצה $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ 3 & -4 & -2\\ 2 & -3 & -2\end{pmatrix}$.

2) רשמו את פירוק LU של המטריצה $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3 & 4\\ 2 & 3 & -8 & 5\\ 1 & 3 & 1 & 3\\ 3 & 8 & -1 & 13\end{pmatrix}$.

3) רשמו את פירוק LU של המטריצה $A=\begin{pmatrix}2 & -6 & 6\\ -4 & 5 & -7\\ 3 & 5 & -1\\ -6 & 4 & -8\\ 8 & -3 & 9\end{pmatrix}$.

תשובות סופיות

1) $$\underbrace{\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ 3 & -4 & -2\\ 2 & -3 & -2\end{pmatrix}}_{A}=\underbrace{\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 3 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}}_{L}\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}}_{U}$$

2) $$\underbrace{\begin{pmatrix}1 & 2 & -3 & 4\\ 2 & 3 & -8 & 5\\ 1 & 3 & 1 & 3\\ 3 & 8 & -1 & 13\end{pmatrix}}_{A}=\underbrace{\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 1 & 0\\ 3 & -2 & 2 & 1\end{pmatrix}}_{L}\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}1 & 2 & -3 & 4\\ 0 & -1 & -2 & -3\\ 0 & 0 & 2 & -4\\ 0 & 0 & 0 & 3\end{pmatrix}}_{U}$$

3) $$\underbrace{\begin{pmatrix}2 & -6 & 6\\ -4 & 5 & -7\\ 3 & 5 & -1\\ -6 & 4 & -8\\ 8 & -3 & 9\end{pmatrix}}_{A}=\underbrace{\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ -2 & 1 & 0 & 0 & 0\\ \frac{3}{2} & -2 & 1 & 0 & 0\\ -3 & 2 & 0 & 1 & 0\\ 4 & -3 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}}_{L}\cdot\underbrace{\begin{pmatrix}2 & -6 & 6\\ 0 & -7 & 5\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}}_{U}$$

פירוק SVD

שאלות

1) נתונה המטריצה $A=\begin{bmatrix}3&2&2\\2&3&-2\end{bmatrix}$.

מצאו את הערכים הסינגולריים ואת הווקטורים הסינגולריים השמאליים והימניים של המטריצה.

2) נתונה המטריצה $A=\begin{bmatrix}0&-1&1\\1&1&0\end{bmatrix}$.

מצאו את הערכים הסינגולריים ואת הווקטורים הסינגולריים **הימניים** של המטריצה.

3) נתונה המטריצה $A=\begin{bmatrix}1&-1\\0&1\\1&0\end{bmatrix}$.

מצאו את הערכים הסינגולריים ואת הווקטורים הסינגולריים **השמאליים** של המטריצה.

4) נתונה המטריצה $A=\begin{bmatrix}0&1&1\\\sqrt{2}&2&0\\0&1&1\end{bmatrix}$.

מצאו את הערכים הסינגולריים ואת הווקטורים הסינגולריים **השמאליים** של המטריצה.

5) נתונה המטריצה $A=\begin{bmatrix}-1&-2\\-2&2\end{bmatrix}$.

מצאו את הערכים הסינגולריים ואת הווקטורים הסינגולריים **השמאליים** של המטריצה.

6) נתונה המטריצה $A=\begin{bmatrix}1&i\\i&-1\end{bmatrix}$.

מצאו את הערכים הסינגולריים ואת הווקטורים הסינגולריים **השמאליים** של המטריצה.

7) מצאו פירוק SVD של המטריצה $A=\begin{bmatrix}0 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}$.

8) מצאו פירוק SVD של המטריצה $A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$.

9) מצאו פירוק SVD של המטריצה $A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ \sqrt{2} & 2 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$.

10) מצאו פירוק SVD של המטריצה $A=\begin{bmatrix}-1 & -2\\ -2 & 2\end{bmatrix}$.

11) מצאו פירוק SVD של המטריצה $A=\begin{bmatrix}1 & i\\ i & -1\end{bmatrix}$.

תשובות סופיות

1) $\sigma_1=5,\ \sigma_2=3\ ;\ u_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\ u_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}\ ;\ v_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},\ v_2=\frac{1}{\sqrt{18}}\begin{bmatrix}1\\-1\\4\end{bmatrix},\ v_3=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}-2\\2\\1\end{bmatrix}$

2) $\sigma_1=\sqrt{3},\ \sigma_2=1\ ;\ v_1=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\-2\\1\end{pmatrix},\ v_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\ v_3=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$

3) $\sigma_1=\sqrt{3},\ \sigma_2=1\ ;\ u_1=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix},\ u_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\ u_3=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$

4) $\sigma_1=\sqrt{8},\ \sigma_2=\sqrt{2}\ \ ;\ u_1=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix},\ u_2=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix},\ u_3=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$

5) $\sigma_1=3,\ \sigma_2=2\ ;\ u_1=\frac{1}{\sqrt{1.25}}\begin{bmatrix}-0.5\\1\end{bmatrix},\ u_2=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$

6) $\sigma_1=2\ ;\ u_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-i\\1\end{bmatrix},\ u_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}i\\1\end{bmatrix}$

7)
$$\begin{bmatrix}0&-1&1\\1&1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{-1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{3}&0&0\\0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{-1}{\sqrt{6}}&\frac{-2}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{-1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}$$

8)
$$\begin{bmatrix}1&-1\\0&1\\1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{2}{\sqrt{6}}&0&\frac{-1}{\sqrt{3}}\\\frac{-1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{-1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{3}&0\\0&1\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{-1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$$

9)
$$\begin{bmatrix}0&1&1\\\sqrt{2}&2&0\\0&1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{-1}{\sqrt{2}}\\\frac{2}{\sqrt{6}}&\frac{-1}{\sqrt{3}}&0\\\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{8}&0&0\\0&\sqrt{2}&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{\sqrt{3}}{2}&\frac{\sqrt{3}}{6}\\\frac{-1}{\sqrt{3}}&0&\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\\\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{-1}{2}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

10) $$\begin{bmatrix}-1 & -2\\ -2 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{-1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}}\\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\frac{-1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}}\\ \frac{-2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}}\end{bmatrix}$$

11) $$\begin{bmatrix}1 & i\\ i & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{-i}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}i & \frac{-1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}i & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$$

פירוק QR

שאלות

בשאלות **4-1** הפעילו את תהליך גרם-שמידט על הקבוצה הנתונה, נרמלו את קבוצת הווקטורים שהתקבלה לאחר התהליך וסמנו קבוצה זו ב- W.

1) $U=\{u_1=(1,1,0),\ u_2=(0,1,1),\ u_3=(1,0,1)\}$

2) $U=\{u_1=(1,0,1),\ u_2=(2,1,0),\ u_3=(0,1,1)\}$

3) $U=\{u_1=(1,3),\ u_2=(2,4)\}$

4) $U=\{u_1=(2,2,2,2),\ u_2=(1,1,2,4),\ u_3=(1,2,-4,-3)\}$

בשאלות **7-5**:

א. הפעילו את תהליך גרם-שמידט על הקבוצה הנתונה, נרמלו את קבוצת הווקטורים שהתקבלה לאחר התהליך, וסמנו קבוצה זו ב- W.

ב. השלימו את הקבוצה W מסעיף א' לקבוצה אורתונורמלית של 3 וקטורים.

5) $U=\{u_1=(1,1,1),\ u_2=(2,2,2),\ u_3=(2,3,4)\}$

6) $U=\{u_1=(1,2,3),\ u_2=(4,5,6),\ u_3=(7,8,9)\}$

7) $U=\{u_1=(1,1,1),\ u_2=(2,2,2),\ u_3=(3,3,3)\}$

8) א. הפעילו את גרם-שמידט על הקבוצה $U=\{u_1=(2,3),\ u_2=(4,6)\}$, נרמלו את קבוצת הווקטורים שהתקבלה לאחר התהליך, וסמנו קבוצה זו ב- W.
ב. השלימו את הקבוצה W מסעיף א' לקבוצה אורתונורמלית של 2 וקטורים.

9) א. הפעילו את גרם-שמידט על הקבוצה
$U=\{u_1=(1,1,0),\ u_2=(0,1,1),\ u_3=(1,2,1),\ u_4=(1,3,2)\}$, נרמלו את
קבוצת הווקטורים שהתקבלה לאחר התהליך, וסמנו קבוצה זו ב- W.
ב. השלימו את הקבוצה W מסעיף א' לקבוצה אורתונורמלית של 2 וקטורים.

10) הפעילו את תהליך גרם-שמידט על הקבוצה:
$U=\{u_1=(1-i,1+i),\ u_2=(1+2i,1-2i)\}$.
נרמלו את קבוצת הווקטורים שהתקבלה לאחר התהליך וסמנו קבוצה זו ב-W.
הערה: תרגיל זה מיועד רק למי שלמד מספרים מרוכבים.

11) א. מצאו פירוק QR למטריצה: $A=\begin{bmatrix}1&2&0\\0&1&1\\1&0&1\end{bmatrix}$.

ב. בעזרת הפירוק מסעיף א' פתרו את המערכת: $\begin{cases}x+2y=3\\y+z=-1\\x+z=-1\end{cases}$.

12) מצאו פירוק QR ל- $A=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}$.

13) מצאו פירוק QR ל- $A=\begin{bmatrix}2&1&1\\2&1&2\\2&2&-4\\2&4&-3\end{bmatrix}$.

14) מצאו פירוק QR ל- $A=\begin{bmatrix}1&4&7\\2&5&8\\3&6&9\end{bmatrix}$.

15) מצאו פירוק QR ל- $A=\begin{bmatrix}1&2&3\\1&2&3\\1&2&3\end{bmatrix}$.

16) מצאו פירוק QR ל- $A=\begin{bmatrix}1&0&1&-1\\0&2&2&0\\1&3&4&0\\0&4&4&1\end{bmatrix}$.

17) מצאו פירוק QR ל- $A=\begin{bmatrix}2&4\\3&6\end{bmatrix}$.

18) מצאו פירוק QR ל- $A=\begin{bmatrix}1&0&1&1\\1&1&2&3\\0&1&1&2\end{bmatrix}$.

19) מצאו פירוק QR ל- $A=\begin{bmatrix}1-i&1+2i\\1+i&1-2i\end{bmatrix}$.

הערה: תרגיל זה מיועד רק למי שלמד על מטריצות אוניטריות.

תשובות סופיות

1) $$W=\left\{\hat{w}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)\ ,\ \hat{w}_2=\frac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,2),\ \hat{w}_3=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)\right\}$$

2) $$W=\left\{\hat{w}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)\ ,\ \hat{w}_2=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1),\ \hat{w}_3=\frac{1}{\sqrt{6}}(-1,2,1)\right\}$$

3) $$W=\left\{\hat{w}_1=\frac{1}{\sqrt{10}}(1,3)\ ,\ \hat{w}_2=\frac{1}{\sqrt{10}}(3,-1)\right\}$$

4) $$W=\left\{\hat{w}_1=\frac{1}{4}(2,2,2,2)\ ,\ \hat{w}_2=\frac{1}{\sqrt{6}}(-1,-1,0,2),\ \hat{w}_3=\frac{1}{5\sqrt{2}}(1,3,-6,2)\right\}$$

5) א. $$W=\left\{\hat{w}_1=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1),\ \ \hat{w}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,01)\right\}$$

ב. $$\left\{\hat{w}_1=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1),\ \ \hat{w}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1),\ \ \hat{w}_3=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,1)\right\}$$

6) א. $$W=\left\{\hat{w}_1=\frac{1}{\sqrt{14}}(1,2,3),\hat{w}_2=\frac{1}{\sqrt{21}}(4,1,-2)\right\}$$

ב. $$\left\{\hat{w}_1=\frac{1}{\sqrt{14}}(1,2,3),\ \hat{w}_2=\frac{1}{\sqrt{21}}(4,1,-2),\ \ \hat{w}_3=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,1)\right\}$$

7) א. $$W=\left\{\hat{w}_1=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)\right\}$$

ב. $$\left\{\hat{w}_1=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1),\ \ \hat{w}_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1),\ \ \hat{w}_3=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,1)\right\}$$

8) א. $$W=\left\{\hat{w}_1=\frac{1}{\sqrt{13}}(2,3)\right\}$$ ב. $$\left\{\hat{w}_1=\frac{1}{\sqrt{13}}(2,3),\ \ \hat{w}_2=\frac{1}{\sqrt{13}}(-3,2)\right\}$$

9) א. $$W=\left\{\hat{w}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0),\ \hat{w}_2=\frac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,2)\right\}$$

ב. $$\left\{\hat{w}_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0),\ \hat{w}_2=\frac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,2),\ \hat{w}_3=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)\right\}$$

10) $$W=\left\{\hat{w}_1=\frac{1}{2}(1-i,1+i),\ \frac{1}{2}(1+i,1-i)\right\}$$

11) א. $$\begin{bmatrix}1&2&0\\0&1&1\\1&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{-1}{\sqrt{6}}\\0&\frac{1}{\sqrt{3}}&\sqrt{\frac{2}{3}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{-1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\sqrt{2}&\sqrt{2}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\0&\sqrt{3}&0\\0&0&\sqrt{\frac{3}{2}}\end{bmatrix}$$

ב. $(x,y,z)=(1,1,-2)$

(12
$$\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{10}}&\frac{3}{\sqrt{10}}\\\frac{3}{\sqrt{10}}&\frac{-1}{\sqrt{10}}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\sqrt{10}&\frac{14}{\sqrt{10}}\\0&\frac{2}{\sqrt{10}}\end{bmatrix}$$

(13
$$\begin{bmatrix}2&1&1\\2&1&2\\2&2&-4\\2&4&-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&\frac{-1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{50}}\\\frac{1}{2}&\frac{-1}{\sqrt{6}}&\frac{3}{\sqrt{50}}\\\frac{1}{2}&0&\frac{-6}{\sqrt{50}}\\\frac{1}{2}&\frac{2}{\sqrt{6}}&\frac{2}{\sqrt{50}}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}4&4&-2\\0&\sqrt{6}&\frac{-9}{\sqrt{6}}\\0&0&\frac{5}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$$

(14
$$\begin{bmatrix}1&4&7\\2&5&8\\3&6&9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{14}}&\frac{4}{\sqrt{21}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{2}{\sqrt{14}}&\frac{1}{\sqrt{21}}&\frac{-2}{\sqrt{6}}\\\frac{3}{\sqrt{14}}&\frac{-2}{\sqrt{21}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{14}{\sqrt{14}}&\frac{32}{\sqrt{14}}&\frac{50}{\sqrt{14}}\\0&\frac{9}{\sqrt{21}}&\frac{18}{\sqrt{21}}\\0&0&0\end{bmatrix}$$

(15
$$\begin{bmatrix}1&2&3\\1&2&3\\1&2&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{-1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&0&\frac{-2}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\frac{3}{\sqrt{3}}&\frac{6}{\sqrt{3}}&\frac{9}{\sqrt{3}}\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

(16
$$\begin{bmatrix}1&0&1&-1\\0&2&2&0\\1&3&4&0\\0&4&4&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{-3}{7\sqrt{2}}&\frac{-8}{7\sqrt{13}}&\frac{2}{\sqrt{13}}\\0&\frac{4}{7\sqrt{2}}&\frac{-22}{7\sqrt{13}}&\frac{-1}{\sqrt{13}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{3}{7\sqrt{2}}&\frac{8}{7\sqrt{13}}&\frac{-2}{\sqrt{13}}\\0&\frac{8}{7\sqrt{2}}&\frac{5}{7\sqrt{13}}&\frac{2}{\sqrt{13}}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\sqrt{2}&\frac{3}{\sqrt{2}}&\frac{5}{\sqrt{2}}&\frac{-1}{\sqrt{2}}\\0&\frac{7}{\sqrt{2}}&\frac{7}{\sqrt{2}}&\frac{11}{7\sqrt{2}}\\0&0&0&\frac{\sqrt{13}}{7}\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

(17
$$\begin{bmatrix}2&4\\3&6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{2}{\sqrt{13}}&\frac{-3}{\sqrt{13}}\\\frac{3}{\sqrt{13}}&\frac{2}{\sqrt{13}}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\sqrt{13}&2\sqrt{13}\\0&0\end{bmatrix}$$

18)
$$\begin{bmatrix}1&0&1&1\\1&1&2&3\\0&1&1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{-1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{-1}{\sqrt{3}}\\0&\frac{2}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{2}&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{3}{\sqrt{2}}&\frac{4}{\sqrt{2}}\\0&\frac{3}{\sqrt{6}}&\frac{3}{\sqrt{6}}&\sqrt{6}\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

19)
$$\begin{bmatrix}1-i&1+2i\\1+i&1-2i\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i&\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\\\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i&\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2&-1\\0&3\end{bmatrix}$$

אנליזה מתמטית

פרק 21 - ערכים עצמיים-וקטורים עצמיים-לכסון מטריצות - דימיון

תוכן העניינים

לכסון מטריצות – תרגילי חישוב

שאלות

עבור כל אחת מהמטריצות בשאלות **1-4**:

א. מצאו מטריצה אופיינית.

ב. מצאו פולינום אופייני.

ג. מצאו ערכים עצמיים ואת הריבוי האלגברי של כל ערך עצמי.

ד. מצאו מרחבים עצמיים ואת הריבוי הגיאומטרי של כל ערך עצמי.

ה. מצאו וקטורים עצמיים.

ו. קבעו האם המטריצה ניתנת ללכסון.

ז. במידה והמטריצה ניתנת ללכסון, לכסנו אותה.
כלומר, מצאו מטריצה הפיכה P, כך ש- $P^{-1}AP = D$, כאשר D מטריצה אלכסונית.

ח. במידה והמטריצה ניתנת ללכסון, חשבו A^{2009}.

ט. מצאו את הפולינום המינימלי.

י. קבעו האם המטריצה הפיכה לפי ערכיה העצמיים.
במידה והמטריצה הפיכה, בטאו את A^{-1} בעזרת A ו- I בלבד,
תוך שימוש במשפט קיילי המילטון.

1) $A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

2) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

3) $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

4) $A=\begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix}$

עבור כל אחת מהמטריצות בשאלות **5-6** מצאו ערכים עצמיים ו-וקטורים עצמיים.
במידה והמטריצה ניתנת ללכסון, לכסנו אותה.
כלומר, מצאו מטריצה הפיכה P, כך ש- $P^{-1}AP = D$, כאשר D מטריצה אלכסונית.
פתרו פעם מעל $\mathbb{C}$ ופעם מעל $\mathbb{R}$.

5) $A=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$

6) $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

עבור כל אחת מהמטריצות בשאלות **7-11** מצאו ערכים עצמיים ו-וקטורים עצמיים:

7) $A=\begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

8) $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

9) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

10) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

11) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

12) תהי A מטריצה ממשית ריבועית מסדר 3×3.

ידוע כי הווקטורים העצמיים של המטריצה הם $v_1=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$,

והם מתאימים לערכים העצמיים: $\lambda_1=6, \lambda_2=2, \lambda_3=-4$.

מצאו את המטריצה A.

13) קבעו האם קיימת מטריצה ממשית ריבועית מסדר 3×3,

בעלת וקטורים עצמיים $v_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, v_2=\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, v_3=\begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$,

המתאימים לערכים העצמיים: $\lambda_1=1, \lambda_2=2, \lambda_3=3$.

במידה וקיימת מטריצה כזאת, מצאו אותה.

תשובות סופיות

1) א. $\begin{bmatrix} x & -2 & 1 \\ 0 & x-2 & 1 \\ 0 & -1 & x \end{bmatrix}$ ב. $p(x)=x(x-1)^2$ ג. $x=0,\ x=1$,

הריבוי האלגברי של $x=1$ הוא 2, והריבוי האלגברי של $x=0$ הוא 1.

ד. $V_{x=1}=sp\{\langle 1,1,1\rangle\}$ – ריבוי גיאומטרי: 1.

$V_{x=0}=sp\{\langle 1,0,0\rangle\}$ – ריבוי גיאומטרי: 1.

ה. $\langle 1,1,1\rangle,\ \langle 1,0,0\rangle$ ו-ח. לא ניתנת.

ט. $\deg=3$ $m(x)=x(x-1)^2$ – הפולינום האופייני הוא גם הפולינום המינימלי.

י. לא הפיכה.

2) א. $\begin{bmatrix} x-1 & -1 & 0 \\ 0 & x-1 & 0 \\ 0 & 0 & x-2 \end{bmatrix}$ ב. $p(x)=(x-1)^2(x-2)$ ג. $x=1,\ x=2$

הריבוי האלגברי של $x=1$ הוא 2, והריבוי האלגברי של $x=2$ הוא 1.

ד. $V_{x=1}=sp\{\langle 1,0,0\rangle\}$ – ריבוי גיאומטרי: 1.

$V_{x=2}=sp\{\langle 0,0,1\rangle\}$ – ריבוי גיאומטרי: 1.

ה. $\langle 0,0,1\rangle,\ \langle 1,0,0\rangle$ ו-ח. לא ניתנת.

ט. $\deg=3$ $m(x)=(x-1)^2(x-2)$ – הפולינום האופייני הוא גם המינימלי.

י. הפיכה.

3) א. $\begin{bmatrix} x-1 & 0 & -1 \\ 0 & x-1 & 0 \\ -1 & 0 & x-1 \end{bmatrix}$ ב. $p(x)=x(x-1)(x-2)$ ג. $x=0,\ x=1,\ x=2$

$x=0$ – ריבוי אלגברי: 1, $x=1$ – ריבוי אלגברי: 1, $x=2$ – ריבוי אלגברי: 1.

ד. $V_{x=0}=sp\{\langle -1,0,1\rangle\}$ – ריבוי גיאומטרי: 1.

$V_{x=1}=sp\{\langle 0,1,0\rangle\}$ – ריבוי גיאומטרי: 1.

ה. $\langle 0,1,0\rangle,\ \langle 1,0,1\rangle,\ \langle -1,0,1\rangle$ ו. ניתנת ללכסון. ז. $P=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

ח. $\begin{bmatrix} 2^{2016} & 0 & 2^{2016} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{2016} & 0 & 2^{2016} \end{bmatrix}$ ט. $m(x)=x(x-1)(x-2)$ י. לא הפיכה.

4) א. $\begin{bmatrix} x+1 & -3 & 0 \\ -3 & x+1 & 0 \\ 2 & 2 & x-6 \end{bmatrix}$ ב. $p(x)=(x-6)(x-2)(x+4)$

ג. $x=6,\ x=2,\ x=-4$

$x=-4$ – ריבוב אלגברי: 1, $x=2$ – ריבוב אלגברי: 1, $x=6$ – ריבוב אלגברי: 1.

ד. $V_{x=6}=sp\{\langle 0,0,1\rangle\}$ – ריבוב גיאומטרי: 1.

$V_{x=2}=sp\{\langle 1,1,1\rangle\}$ – ריבוב גיאומטרי: 1.

$V_{x=-4}=sp\{\langle -1,1,0\rangle\}$ – ריבוב גיאומטרי: 1.

ה. $\langle 0,0,1\rangle,\ \langle -1,1,0\rangle,\ \langle 1,1,1\rangle$ ו. ניתנת ללכסון.   ז. $P=\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

ח. $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2^{2017}+(-4)^{2017} & 2^{2017}-(-4)^{2017} & 0 \\ 2^{2017}-(-4)^{2017} & 2^{2017}+(-4)^{2017} & 0 \\ -6^{2017}+2^{2017} & -6^{2017}+2^{2017} & 2\cdot 6^{2017} \end{bmatrix}$

ט. $m(x)=(x-6)(x-2)(x+4)$ י. הפיכה.

5) אין פתרונות מעל $\mathbb{R}$, ולכן אין ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים.

מעל $\mathbb{C}$: $x=1\pm 2i$, $\boldsymbol{v}_{x=1+2i}=\langle 1+i,2\rangle$, $\boldsymbol{v}_{x=1-2i}=\langle 1-i,2\rangle$,

$D=\begin{bmatrix} 1+2i & 0 \\ 1 & 1-2i \end{bmatrix}$, $A=\begin{bmatrix} 1+i & 1-i \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

6) ערכים עצמיים: $x=3$, וקטורים עצמיים: $\boldsymbol{v}_{x=3}=\langle -1,1\rangle$. לא ניתנת ללכסון.

7) ערכים עצמיים: $x_1=2,\ x_{2,3}=3$,

וקטורים עצמיים: $V_{x=2}=(1,1,1)$, $v^{(2)}_{x=3}=(1,1,0)$, $v^{(1)}_{x=3}=(1,0,1)$

8) $x=1,\ x=3,\ x=-2$, $v_{x=1}=(-1,4,1)$, $v_{x=3}=(1,2,1)$, $v_{x=-2}=(-1,1,1)$

9) $x=1,\ x=4,\ x=-1$, $v_{x=1}=(1,-2,1)$, $v_{x=4}=(1,1,1)$, $v_{x=-1}=(-1,0,1)$

10) $x=-1,\ x=3$, $v_{x=1}=(-1,2)$, $v_{x=3}=(1,2)$

11) $x=1, x=1\pm\sqrt{3}i$, $\boldsymbol{v}_{x=1}=\langle 1,1,1\rangle$, $\boldsymbol{v}_{x=1+\sqrt{3}i}=\left(1-\sqrt{3}i,1+\sqrt{3}i,-2\right)$,

$\boldsymbol{v}_{x=1-\sqrt{3}i}=\left(1+\sqrt{3}i,1-\sqrt{3}i,-2\right)$

12) $A=\begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 6 \end{bmatrix}$

13) אין כזו מטריצה.

אנליזה מתמטית

פרק 22 - וקטורים גיאומטרים, פונקציות וקטוריות, אופרטורים וקטורים

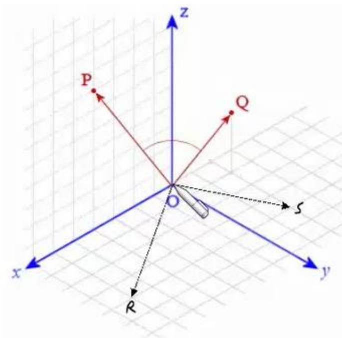
תוכן העניינים

וקטורים

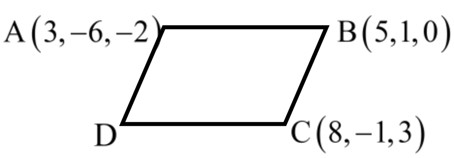
הערת סימון: אנו נסמן את הווקטור u כך $\underline{u}$. סימונים מקובלים נוספים הם: $\mathbf{u}$, $\vec{u}$.
את גודל הווקטור $\underline{u}$ נסמן כך $|\underline{u}|$. סימון מקובל נוסף הוא $\|\underline{u}\|$.
גודל וקטור נקרא גם אורך הווקטור וגם הנורמה של הווקטור.

שאלות

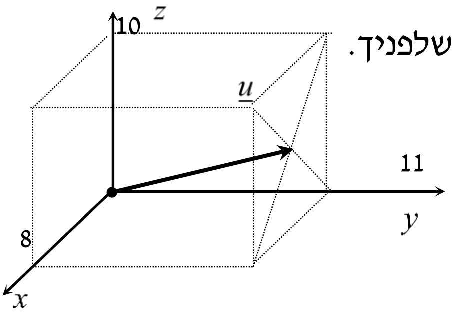
1) רשמו את נוסחת כל אחד מהווקטורים $\vec{P},\vec{Q},\vec{R},\vec{S}$ שבאיור.
הנח שאורך ורוחב כל משבצת באיור הוא יחידה אחת.



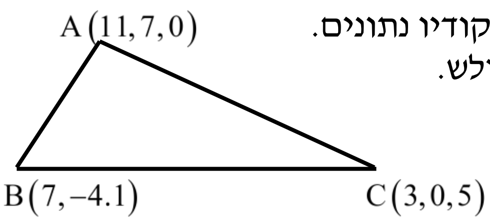
2) בשרטוט הבא נתונה מקבילית,
ששיעורי שלושה מקדקודיה נתונים.
מצאו את שיעורי הקדקוד D.
רמז: היעזרו בנוסחת אמצע קטע.



3) נתונה תיבה שמידותיה נתונות במערכת הצירים שלפניך.
מצאו מהו הווקטור $\underline{u}$ על פי השרטוט.



4) בשרטוט הבא נתון משולש ששיעורי קדקודיו נתונים.
מצאו את שיעורי מפגש התיכונים במשולש.

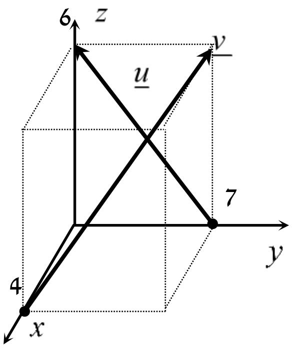


5) ענו על הסעיפים הבאים (אין קשר בין הסעיפים):

א. מצאו את הווקטור $\overrightarrow{EF}$ אם נתונות הנקודות $E(2,0,-3)$ ו- $F(7,-1,-3)$.

ב. מצאו את שיעורי הנקודה N, אם נתונה הנקודה $M(0,-4,1)$ והווקטור $\overrightarrow{MN}=(-1,-1,9)$.

6) נתונה תיבה שמידותיה נתונות במערכת הצירים שלפניך. מצאו מהו הווקטור $\underline{u}$ ומהו הווקטור $\underline{v}$.



7) מצאו את x, y ו- z, אם נתון ש- $\underline{u}=\underline{v}$ כאשר $\underline{u}=(4,-1,2)$, $\underline{v}=(z-2,y+1,x-3)$.

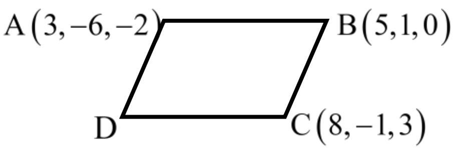
8) נתונות הנקודות הבאות:

$A(1,0,2)$, $B(3,7,-4)$, $C(6,9,0)$, $D(7,4,10)$, $E(9,11,4)$.

א. הראו כי $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DE}$.

ב. האם ניתן לומר גם כי $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$? נמקו.

9) בשרטוט נתונה מקבילית,
ששיעורי שלושה מקדקודיה נתונים.
מצאו את שיעורי הקדקוד D.
* אין להיעזרו בפתרון בנוסחת אמצע קטע.



בשאלות **16-10** נתונים הווקטורים $\underline{u}=(-3,1,4)$, $\underline{v}=(4,-2,-6)$ ו- $\underline{w}=(2,6,-5)$.

* בשאלות **13**, **14**, ו-**16** הסבירו את משמעות התוצאות מבחינה גיאומטרית.

10) חשבון :

א. $2\underline{u}$ ב. $-0.5\underline{v}$ ג. $3\underline{u}-2\underline{v}$

11) חשבון :

א. $0.25\underline{v}-0.5\underline{u}$ ב. $\underline{v}-0.5\underline{u}+2\underline{w}$

12) $2\underline{v}-\underline{u}+4\underline{w}$

13) $\underline{u}/|\underline{u}|$

14) $d(\underline{u},\underline{v})$

15) $\underline{v}\cdot\underline{u}+2\underline{w}\cdot\underline{v}$

16) $\text{proj}(\underline{u},\underline{v})$

בשאלות **19-17** נתונות הנקודות $A(1,-3,0)$, $B(4,2,-1)$, $C(3,-1,2)$,
ויש למצוא את הווקטורים :

17) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}$

18) $2\overrightarrow{AC}-4\overrightarrow{AB}$

19) $2\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}$

20) נתונים ארבעת קדקודי המרובע ABCD :
$A(-4,2,1)$, $B(0,2,-1)$, $C(-3,-5,0)$, $D(-7,-5,2)$.
הוכיחו כי המרובע הוא מקבילית.

21) נתונים ארבעת קדקודי המרובע ABCD :
$A(1,2,0)$, $B(-2,5,3)$, $C(-1,8,4)$, $D(4,3,-1)$.

א. הוכיחו כי המרובע הוא טרפז.

ב. האם הטרפז שווה שוקיים?

22) חשבו את הזווית שבין הווקטורים $\underline{u}$ ו- $\underline{v}$:

א. $\underline{u}=(-2,2,5)$, $\underline{v}=(4,0,1)$

ב. $\underline{u}=(6,-3,1)$, $\underline{v}=(2,5,3)$

ג. $\underline{u}=(-2,1,3)$, $\underline{v}=(4,-2,-6)$

23) מצאו את שטחו של משולש ABC שקדקודיו הם :
$A(-3,2,1)$, $B(0,3,2)$, $C(5,-1,0)$.

24) נתונים הווקטורים $\underline{u}=(2,-1,0)$, $\underline{v}=(5,0,3)$.
מצאו וקטור $\underline{w}$ שמכפלתו ב- $\underline{u}$ היא 0 ומכפלתו ב- $\underline{v}$ היא 0,
אם ידוע שגודלו הוא $\sqrt{70}$.

25) מצאו וקטור שמאונך לשני הווקטורים $(3,2,1)$ ו- $(1,-1,2)$,
ושמרחקו מהווקטור $(1,1,0)$ הוא $\sqrt{3}$.

26) ענו על שני הסעיפים הבאים :

א. הוכיחו כי $u\perp v \Leftrightarrow |u+v|=|u-v|$.
הסבירו מהו הפירוש הגיאומטרי של תכונה זו במישור.

ב. הוכיחו כי $u\perp v \Leftrightarrow |u+v|^2=|u|^2+|v|^2$.
הסבירו מהו הפירוש הגיאומטרי של תכונה זו במישור.

27) הוכיחו :

א. $|u+v|^2=|u|^2+2u\cdot v+|v|^2$

ב. $|u-v|^2=|u|^2-2u\cdot v+|v|^2$

ג. $(u-v)(u+v)=|u|^2-|v|^2$

ד. $|u+v|^2+|u-v|^2=2|u|^2+2|v|^2$
תנו פירוש גיאומטרי לתוצאה במישור.

ה. $\frac{1}{4}\left(|u+v|^2-|u-v|^2\right)=u\cdot v$

28) יהיו $u,v\in\mathbb{R}^n$ וקטורים שונים מ- 0, אורתוגונליים זה לזה ובעלי אותה נורמה.
נגדיר $a=u-2v,\ b=3u+v$.
אם α היא הזווית בין a ל- b, אז $\cos\alpha$ שווה ל-?

29) יהיו $w_1,w_2\in\mathbb{R}^n$ וקטורים שונים מ- 0, אורתוגונליים זה לזה ובעלי נורמה k.
יהי $v=\alpha w_1+\frac{3}{4}w_2$ וקטור שמרחקו מ- $2w_2$ שווה למרחקו מ- w_1.
מהו המרחק של v מ- w_1?

30) יהיו $u,v\in\mathbb{R}^n$ וקטורי יחידה המקיימים $\|u-v\|=2$.
הוכיחו ש- u ו- v הם בהכרח כפולה בסקלר אחד של השני.

תשובות סופיות

1) $\vec{S}=(-2,4,0)$, $\vec{R}=(6,4,0)$, $\vec{Q}=(-2,1,3)$, $\vec{P}=(4,0,7)$

2) $D=(6,-8,1)$

3) $\underline{u}=(4,11,5)$

4) $M=(7,1,2)$

5) א. $\overrightarrow{EF}=(5,-1,0)$ ב. $N=(-1,-5,10)$

6) $\underline{v}=(-4,7,6)$, $\underline{u}=(0,-7,6)$

7) א. $x=5$, $y=-2$, $z=6$

8) א. שאלת הוכחה. ב. לא.

9) $D=(6,-8,1)$

10) א. $(-6,2,8)$ ב. $(-2,1,3)$ ג. $(-17,7,24)$

11) א. $(2.5,-1,-3.5)$ ב. $(9.5,9.5,-18)$

12) $(19,19,-36)$

13) $\left(\frac{-3}{\sqrt{20}},\frac{1}{\sqrt{20}},\frac{4}{\sqrt{20}}\right)$

14) $\sqrt{158}$

15) 14

16) $\underline{u}^*$

17) $(5,7,1)$

18) $(-8,-16,8)$

19) $(8,12,0)$

20) שאלת הוכחה.

21) א. שאלת הוכחה. ב. כן.

22) א. $\alpha=97.277°$ ב. $\alpha=90°$ ג. $\alpha=180°$

23) $S_{\Delta ABC}=10.173$ יח"ש.

24) $(-3,-6,5)$

25) $v=\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ or $v=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

26) שאלת הוכחה.

27) שאלת הוכחה.

28) $\frac{1}{\sqrt{50}}$

29) $\frac{5}{4}k$

30) שאלת הוכחה.

מכפלה וקטורית ומכפלה מעורבת

שאלות

1) נתון: $w=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\ v=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\ u=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$.

חשבו: $(u\times v)\times w$.

2) חשבו את שטח המשולש שקדקודיו: $A=(8,2,3),\ B(4,-1,2),\ C(-8,0,4)$.

3) נתונים שלושה וקטורים u,v,w במרחב.

ידוע כי $|u|\neq 0$, $u\cdot w=0$, $u\times v=0$.

הוכיחו כי $v\cdot w=0$.

4) נתונים שני וקטורים u,v במרחב.

ידוע כי $|v|=4$, $|u|=1$, $u\perp v$.

חשבו $|(u+v)\times(u-v)|$.

5) נתון $w=\begin{pmatrix}7\\8\\10\end{pmatrix},\ v=\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix},\ u=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$.

חשבו:

א. $u\cdot(v\times w)$ ב. $v\cdot(w\times u)$ ג. $(u\times v)\cdot w$

6) חשבו את נפח:

א. המקבילון שקדקודיו $A(1,1,1), B(2,2,2), C(3,0,2), D(4,1,1)$.

ב. הפירמידה שקדקודיה $A(1,1,1), B(2,2,2), C(3,0,2), D(4,1,1)$.

7) חשבו את נפח הפירמידה שקדקודיה $A(2,2,5), B(1,-1,-4), C(3,3,10), D(8,6,3)$.

8) נתון מקבילון הבנוי על וקטורים $\mathbf{a,b,c}$.
הוכיחו כי נפח המקבילון, הבנוי על הווקטורים $\mathbf{a,a-b,a+b-4c}$,
שווה לפי 4 מנפח המקבילון הנתון.

9) נתונים שלושה וקטורים u,v,w במרחב.
הוכיחו כי $\left[(u+v)\times(v+w)\right](u+w)=2w\cdot(u\times v)$.

10) נתונים שלושה וקטורים u,v,w במרחב.
ידוע כי $u\cdot(v\times w)=4$.
חשבו:

א. $u\cdot(w\times v)$ ב. $(v\times w)\cdot u$ ג. $w\cdot(u\times v)$ ד. $v\cdot(u\times w)$

11) נתונים שלושה וקטורים $\mathbf{a,b,c}$ במרחב.
מהי הנוסחה עבור $\mathbf{a\times b\times c}$?

תשובות סופיות

1) $\begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix}$

2) $S=22.5$

3) שאלת הוכחה.

4) 8

5) א. -3 ב. -3 ג. -3

6) א. 6 ב. 1

7) $9\frac{1}{3}$

8) שאלת הוכחה.

9) שאלת הוכחה.

10) א. -4 ב. 4 ג. 4 ד. 4

11) אין לו נוסחה.

שימושי מכפלה וקטורית לגיאומטריה אנליטית במרחב

שאלות

1) הוכיחו שהנקודות הבאות נמצאות על מישור אחד:
$A=(1,2,1)$, $B(1,1,1)$, $C=(2,1,2)$, $D(2,2,2)$.

2) מצאו את מרחק הנקודה $A(3,-2,1)$
מהישר $L:(-10,8,-8)+t(2,-1,2)$.

3) נתונים שני ישרים:

$$L_2:\ x+7=y-5\ ,\ z=3 \qquad L_1:\ \frac{x-2}{2}=3-y=\frac{z-4}{3},$$

א. הוכיחו שהישרים מצטלבים.
ב. מצאו את המרחק בין הישרים.

תשובות סופיות

1) שאלת הוכחה.

2) $\sqrt{26}$

3) א. שאלת הוכחה. ב. 5.7735

פונקציות וקטוריות של משתנה ממשי

שאלות

1) ענו על הסעיפים הבאים:

א. מצאו את תחום ההגדרה של $r(t)$ ואת הווקטור $r(t_0)$, כאשר $r(t)=\left(\cos\pi t,-\ln t,\sqrt{t-2}\right)$ ו- $t_0=4$.

ב. רשמו את המשוואות הפרמטריות $x=\sin t,\ y=\cos t,\ z=\cos^2 t$, כמשוואה וקטורית אחת (כפונקציה וקטורית).

ג. רשמו את ההצגה הפרמטרית המתאימה למשוואה (לפונקציה) הווקטורית $r(t)=\left(t,t^2,t^3\right)$.

2) רשמו את העקומה הנתונה בהצגה פרמטרית ובהצגה וקטורית:

א. $9x^2+4y^2=36$ (במישור xy)

ב. $\begin{cases}-x+y-z+1=0\\4x-2y-2z-1=0\end{cases}$

ג. $\begin{cases}y^2=z\\x^2=y\end{cases}$

ד. $\begin{cases}z=\sqrt{x^2+y^2}\\z=y+2\end{cases}$

ה. $\begin{cases}x^2+y^2=9\\z=x^2\end{cases}$

ו. $\begin{cases}z=x^2+4y^2\\z=2x\end{cases}$

3) נתונה פונקציה וקטורית $r(t)=\left(21t^2,21t^2-1,10e^t\right)$.

בסעיפים א-ג, חשבו:

א. $\lim\limits_{t\to1}r(t)$

ב. $r'(t)$

ג. $\int_0^1 r(t)dt$

ד. האם הפונקציה הנתונה רציפה ב- $t=1$?

ה. האם הפונקציה הנתונה חלקה?

4) נתונה: $r(t)=\left(\cos 4t,\sin 4t,t^4\right)$.

א. חשבו: $\frac{d|r'|}{dt},\ \left|\frac{dr}{dt}\right|,\ \frac{dr}{dt}$.

ב. הוכיחו שהפונקציה מסעיף א' חלקה.

5) נתונה הפונקציה הווקטורית $r(t)=\left(\sin 4t,te^t,t^4\right)$.

א. גזרו את הפונקציה.

ב. מצאו את משוואת הישר, המשיק לעקומה $r(t)=\left(\sin 4t,te^t,t^4\right)$ ב- $t=0$.

ג. מצאו את משוואת הישר, המשיק לעקומה $\begin{cases} y^2=z \\ x^2=y \end{cases}$, בנקודה $A(1,1,1)$.

ד. מצאו משיק יחידה לפונקציה הווקטורית $r(t)=(\sin t,e^{2t},t^2)$, ב- $t=0$.

6) נתונה העקומה $r(t)=\left(t^2,t,5\right)$.

א. מצאו נקודה על העקומה, שבה הישר המשיק מקביל למישור $x-6y+4z-3=0$.

ב. מצאו משוואה של המישור, הניצב לעקומה $r(t)=\left(3\sin t,-2\cos t,t\right)$, ב- $t=0.5\pi$.

(אומרים על מישור, שהוא ניצב לעקומה בנקודה מסוימת, אם הוא ניצב למשיק בנקודה זו)

7) נתון $r(t)=\left(3\sin t,3\cos t,4t\right)$.

חשבו את משיק היחידה **(T)**, נורמל היחידה **(N)** והבינורמל **(B)** של r.

8) תהי $r(t)$ פונקציה וקטורית במרחב תלת ממדי.

א. הוכיחו שאם $|r(t)|$ קבוע לכל t, אז $r(t)\cdot r'(t)=0$.
כלומר, $r(t)$ ו- $r'(t)$ ניצבים זה לזה.

ב. הוכיחו שנורמל היחידה $N(t)$, ניצב למשיק היחידה $T(t)$.

9) נתונה פונקציה וקטורית $r(t)=\left(t,t^2,t^3\right)$.

מצאו את משוואת המישור הניצב, מישור היישור ומישור הנישוק, המתאימים ל- $t=2$.

10) נתון $r(t)=\left(x(t),y(t),z(t)\right)$.
על סמך הגדרת הנגזרת של פונקציה וקטורית,
הוכיחו כי $r'(t)=\left(x'(t),y'(t),z'(t)\right)$.

11) חלקיק נע לאורך עקום מרחבי $x=t^3+2t,\ y=-3e^{-2t},\ z=2\sin 5t$.
עבור החלקיק, בזמן $t=0$, חשבו את:
א. המהירות.
ב. גודל המהירות.
ג. התאוצה.
ד. גודל התאוצה.
ה. הזווית בין וקטורֵי המהירות והתאוצה.

12) נתון רדיוס וקטור של נקודה כפונקציה של זמן $\vec{r}(t)=\vec{v}_0t-\frac{1}{2}gt^2\vec{k}$,
כאשר $\vec{v}_0=\vec{v}(0)=(v_{01},v_{02},v_{03})$ המהירות ההתחלתית.
מצאו את המהירות והתאוצה והערכים שלהם.

13) חלקיק נע על העקומה $x=2\cos t,\ y=2\sin t$.
א. חשבו את מהירות החלקיק ואת גודל מהירותו ברגע t.
ב. שרטטו את מסלול החלקיק, והוסף לשרטוט את וקטור המיקום ואת וקטור המהירות ברגע $t=0.25\pi$, כאשר עקבו של וקטור המהירות ממוקם בראש וקטור המיקום.
ג. הראו שבכל רגע וקטור המיקום ניצב לווקטור המהירות, ווקטור המהירות ניצב לווקטור התאוצה.

14) מהירות $v(t)$ של חלקיק נתונה על ידי $v(t)=(2,-1,-10t)$.
ברגע $t=0$, החלקיק נמצא בנקודה $r(0)=(0,0,100)$.
מצאו את משואת התנועה של החלקיק $r=r(t)$.

15) תאוצה $a(t)$ של חלקיק, נתונה על ידי $a(t)=\left(18\cos 3t,-18\sin 3t,0\right)$.
ברגע $t=0$ החלקיק נמצא בנקודה $r(0)=(2,0,1)$ (נקרא גם רדיוס וקטור תחילתי) ובמהירות $v(0)=(0,2,4)$.
מצא את משוואת התנועה של החלקיק $r=r(t)$.

16) וקטור המצב (המיקום) של חלקיק נתון על ידי $r(t)=\left(2t^2-5t+3, t-5, t^2-3\right)$.
עבור איזה ערך של t גודל המהירות של החלקיק יהיה מינימאלי ומהו גודל המהירות המינימאלי של החלקיק.

17) ענו על הסעיפים הבאים:
א. מצאו את הנקודה על המסלול $r(t)=\left(t^2-5t\right)\mathbf{i}+(2t+1)\mathbf{j}+3t^2\mathbf{k}$ שבה וקטורי המהירות והתאוצה ניצבים זה לזה.
ב. וקטור המצב (המיקום) של חלקיק נתון על ידי $r(t)=e^t\cos t\mathbf{i}+e^t\sin t\mathbf{j}$.
הראו שהזווית בין $v(t)$ ו- $a(t)$ קבועה ומצאו את הזווית הזו.

18) הוכיחו: אם המהירות של חלקיק קבועה בגודלה אז וקטורי המהירות והתאוצה שלו ניצבים זה לזה.

19) חשבו את העקמומיות ורדיוס העקמומיות של העקום $r(t)=\left(t^2, 0, t\right)$.

20) וקטור המהירות של חלקיק נתון על ידי $v(t)=(2,-1,-10t)$.
מצאו את רדיוס העקמומיות של וקטור המיקום (המצב) של החלקיק ברגע $t=1$.

21) וקטור התאוצה של חלקיק נתון על ידי $a(t)=(8\cos 4t, 8\sin 4t, 0)$.
ברגע $t=0$ החלקיק נמצא במהירות $v(0)=(0,2,4)$.
מצאו את רדיוס העקמומיות של וקטור המיקום (וקטור המצב) של החלקיק ברגע $t=\frac{\pi}{4}$.

22) העקום C הוא מעגל שמרכזו בנקודה (a,b) ורדיוס R.
א. מצאו את העקמומיות ואת רדיוס העקמומיות של העקום C.
ב. הוכיחו שמעגל העקמומיות של העקום מתלכד עם העקום.
כלומר, הוכיחו שמרכזו של מעגל העקמומיות הוא (a,b) ורדיוס R.

23) נתון העקום $r(t)=(4\cos t, 3\sin t)$ כאשר $0\le t\le 2\pi$.
באילו נקודות על העקום העקמומיות שלו מקסימלית ובאילו נקודות על העקום העקמומיות שלו מינימלית. באילו נקודות על העקום רדיוס העקמומיות שלו מקסימלי ובאילו נקודות על העקום רדיוס העקמומיות שלו מינימלי. מצאו את מעגלי העקמומיות בנקודות לעיל. הדגימו את כל התוצאות באיור.

24) נתון העקום $r(\theta)=\left(\cos^3\theta,\sin^3\theta\right)$.
הוכיחו שבכל נקודה על העקום רדיוס העקמומיות שווה לשלוש פעמים האורך של האנך מהראשית למשיק לעקום.

25) נתונה עקומה במרחב דו-ממדי, שהיא גרף של פונקציה $y=f(x)$.
הראו שהעקמומיות היא $\kappa(x)=\frac{|y''(x)|}{\left(1+\left(y'(x)\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}$.

26) נתון העקום $y=\frac{1}{x}$.

א. מצאו את רדיוס העקמומיות של העקום.

ב. מצאו על העקום את הנקודה בה רדיוס העקמומיות מינימלי.
מהו רדיוס זה?

ג. מצאו את מעגל העקמומיות שמתאים לנקודה שנמצאה בסעיף ב.

27) מצאו את רדיוס העקמומיות של העקום $x^4+y^4=2$ בנקודה $(1,1)$.
הדגימו באיור את התוצאה שקיבלת.
מהו מרכז העקמומיות ומהי משוואת מעגל העקמומיות בנקודה הנ"ל?

28) נתונה הפרבולה $y^2=8x$.

א. מצאו את הנקודות על הפרבולה בהן רדיוס העקמומיות שווה ל- $\frac{125}{16}$.

ב. מצאו את מעגל העקמומיות עבור הנקודה ברביע הראשון שנמצאה בסעיף א'.

29) העקום C הוא מעגל שמרכזו בנקודה (a,b) ורדיוס R.
מצאו את העקמומיות ואת רדיוס העקמומיות של העקום.

30) נתון העקום $x=\cos^3\theta,\ y=\sin^3\theta$.
בנקודה בה $\theta=\pi/6$:

א. חשבו את רדיוס העקמומיות.

ב. מצאו את משוואת מעגל העקמומיות/נישוק.

ג. הוכיחו שרדיוס העקמומיות שווה לשלוש פעמים האורך של האנך מהראשית למשיק לעקום.

31) עקומה מישורית מיוצגת על ידי $r(t)=\left(x(t),y(t)\right)$.

הראו שהעקמומיות היא $\kappa(t)=\dfrac{|x'y''-y'x''|}{\left((x')^2+(y')^2\right)^{3/2}}$.

32) ענו על הסעיפים הבאים:

א. חשבו את רדיוס העקמומיות של $x=a\cos t,\ y=b\sin t$ $(a,b>0)$ ב- $t=0$ וב- $t=\pi/2$.

ב. הציבו $a=3,\ b=2$ ותנו פירוש גיאומטרי לתוצאה מסעיף א.
במיוחד מצאו את מרכז העקמומיות ושרטטו את מעגלי העקמומיות.

33) הראו שהעקמומיות של עקומה הנתונה על ידי הצגה קוטבית $r=f(\theta)$ היא $k(\theta)=\dfrac{\left|r^2+2(r')^2-r\cdot r''\right|}{\left(r^2+(r')^2\right)^{\frac{3}{2}}}$.

34) חשבו את העקמומיות של $r=2\sin\theta$ עבור $\theta=\pi/6$.
תנו פירוש גיאומטרי לתוצאה שקיבלת.

35) חשבו את רדיוס העקמומיות של $r=1+\cos\theta$ עבור $\theta=\pi/2$.
תנו פירוש גיאומטרי לתוצאה שקיבלת.
במיוחד מצאו את מעגל העקמומיות ואת מרכז העקמומיות.

תשובות סופיות

1) א1. $0<t\le 4$ א2. $r(4)=\left(\cos 4\pi,-\ln 4,\sqrt{2}\right)$

ב. $r(t)=\left(\sin t,\ \cos t,\cos^2 t\right)$ ג. $x=t,\ y=t^2,\ z=t^3$

2) א. $x=2\cos t\ ,\ y=3\sin t$
$r(t)=\left(2\cos t,3\sin t\right)$

ב. $x=2t-0.5,\ y=3t-1.5,\ z=t$
$r(t)=\left(2t-0.5,3t-1.5,t\right)$

ג. $x=t,\ y=t^2,\ z=t^4$
$r(t)=\left(t,t^2,t^4\right)$

ד. $x=t,\ y=\frac{t^2}{4}-1,\ z=\frac{t^2}{4}+1$
$r(t)=\left(t,\frac{t^2}{4}-1,\frac{t^2}{4}+1\right)$

ה. $x=3\cos t,\ y=3\sin t,\ z=9\cos^2 t$
$r(t)=\left(3\cos t,3\sin t,9\cos^2 t\right)$

3) א. $(21,20,10e)$ ב. $\left(42t,42t,10e^t\right)$ ג. $(7,6,10e-10)$ ד. כן. ה. כן.

4) א. $\frac{dr}{dt}=\left(-4\sin 4t,4\cos 4t,4t^3\right)$, $\left|\frac{dr}{dt}\right|=4\sqrt{1+t^6}$, $\frac{d|r'|}{dt}=\frac{12t^5}{\sqrt{1+t^6}}$
ב. שאלת הוכחה.

5) א. $r'(t)=\left(4\cos 4t,e^t+te^t,4t^3\right)$ ב. $(x,y,z)=(0,0,0)+s(4,1,0)$

ג. $(x,y,z)=(1,1,1)+s(1,2,4)$ ד. $\frac{1}{\sqrt{5}}(1,2,0)$

6) א. $(9,3,5)$ ב. $2y+z=0.5\pi$

7) $T(t)=\frac{1}{5}\left(3\cos t,-3\sin t,4\right),\quad N(t)=(-\sin t,-\cos t,0),\quad B(t)=\frac{1}{5}\left(4\cos t,-4\sin t,-3\right)$

8) שאלת הוכחה.

9) המישור הניצב $x+4y+12z=114$, מישור הנישוק $24x-12y+2z=16$,
מישור היישור $76x+143y-54z=292$.

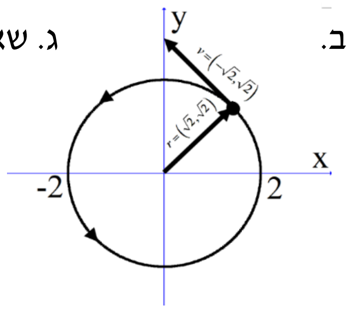
10) שאלת הוכחה.

11) א. $(2,6,10)$ ב. $\sqrt{140}$ ג. $(0,-12,0)$ ד. 12 ה. 120.46°

12) $v(t)=\left(v_{01},v_{02},v_{03}-gt\right),\ |v(t)|=\sqrt{(v_{01})^2+(v_{02})^2+(v_{03}-gt)^2},\ a(t)=\left(0,0,-g\right),\ |a(t)|=g$

13) א. $v(t)=(-2\sin t,2\cos t)$
$|v(t)|=2$

ב.



ג. שאלת הוכחה.

14) $r(t)=(2t,-t,-5t^2+100)$

15) $r(t)=(-2\cos 3t+4,2\sin 3t-4t,4t+1)$

16) $v_{\min}=v(1)=\sqrt{6}$

17) א. $\left(-\frac{19}{16},\frac{3}{2},\frac{3}{16}\right)$ ב. $\alpha=45^{\circ}=\frac{\pi}{4}_{rad}$

18) שאלת הוכחה.

19) $\rho=\frac{(4t^2+1)^{\frac{3}{2}}}{2}$, $\kappa=\frac{2}{(4t^2+1)^{\frac{3}{2}}}$

20) $\rho=\frac{21\sqrt{21}}{2}$

21) $\rho=6.5$, $\kappa=\frac{2}{13}$

22) א. $\rho=R,\ \kappa=1/R$. מכאן, רדיוס העקמומיות של העקום הוא קבוע ושווה ל- $\rho=R$. ועקמומיות העקום קבועה ושווה ל- $\kappa=\frac{1}{R}$. ב. שאלת הוכחה.

23) העקמומיות **מקסימלית** עבור $t=0,\pi,2\pi$ אז העקמומיות תהיה $\kappa=\frac{4}{9}$ בנקודות אלה רדיוס העקמומיות יהיה **מינימלי** ושווה ל- $\frac{9}{4}$. עקמומיות **מינימלית** עבור $t=\pi/2,3\pi/2$ אז העקמומיות תהיה $\kappa=\frac{3}{16}$ בנקודות אלה רדיוס העקמומיות יהיה **מקסימלי** ושווה ל- $\frac{16}{3}$.

24) שאלת הוכחה.

25) שאלת הוכחה.

26) א. $\rho(x)=\frac{(x^4+1)^{\frac{3}{2}}}{2x^2|x|}$

ב. רדיוס העקמומיות מינימלי בנקודה $(1,1)$ ובמקרה זה הוא $\sqrt{2}$.

ג. $(x-2)^2+(y-2)^2=2$

27) רדיוס: $\frac{\sqrt{2}}{3}$; מרכז העקמומיות: $\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$;

משוואת המעגל בנקודה: $(x-2/3)^2+(y-2/3)^2=2/9$.

28) א. $y=\pm 3,\ x=\frac{9}{8}$ ב. $(x-59/8)^2+(y+27/16)^2=(125/16)^2$

29) $\rho=R$, $\kappa=\frac{1}{R}$

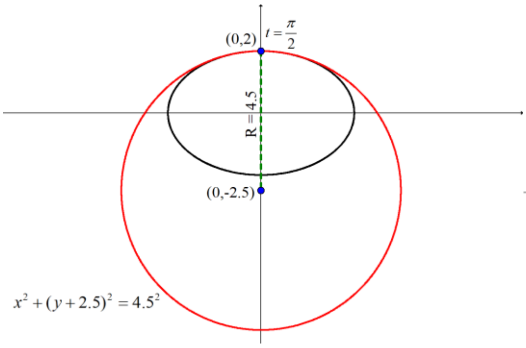
30) א. $\rho=\frac{3\sqrt{3}}{4}$ ב. $x^2+(y+1)^2=\frac{27}{16}$ ג. שאלת הוכחה.

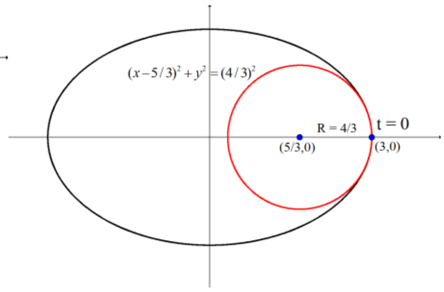
31) שאלת הוכחה.

$$\kappa(0)=\frac{ab}{b^3}=\frac{a}{b^2}\qquad \kappa(\pi/2)=\frac{ab}{a^3}=\frac{b}{a^2}$$

32) א.

$$\rho(0)=\frac{b^2}{a}\qquad \rho(\pi/2)=\frac{a^2}{b}$$



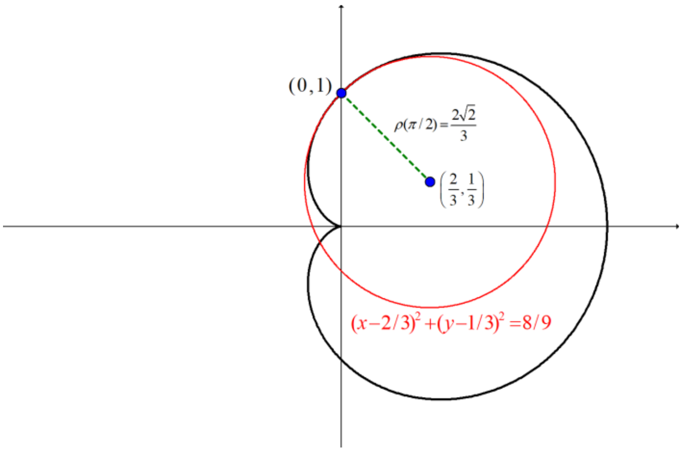


ב.

33) שאלת הוכחה.

34) $\kappa=\rho=1$

35) ראו שרטוט:



גרדיאנט, דיברגנץ ורוטור

שאלות

1) יהיו $\mathbf{F}(x,y,z), \mathbf{G}(x,y,z)$ שדות וקטורים כלליים.

הוכיחו:

א. $\operatorname{div}(\mathbf{F}+\mathbf{G})=\operatorname{div}(\mathbf{F})+\operatorname{div}(\mathbf{G})$

ב. $\nabla(\mathbf{F}+\mathbf{G})=\nabla(\mathbf{F})+\nabla(\mathbf{G})$

2) יהי $\mathbf{F}(x,y,z)$ שדה וקטורי, ותהי $\varphi=\varphi(x,y,z)$ פונקציה.

הוכיחו כי $\operatorname{div}(\varphi\mathbf{F})=(\nabla\varphi)\cdot\mathbf{F}+\varphi\operatorname{div}\mathbf{F}$.

3) יהי $\mathbf{F}(x,y,z)$ שדה וקטורי ותהי $\varphi=\varphi(x,y,z)$ פונקציה.

א. הוכיחו כי $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\mathbf{F})=0$.

או בניסוח אחר $\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{F})=0$.

ב. הוכיחו כי $\operatorname{rot}(\operatorname{grad}\varphi)=0$.

או בניסוח אחר $\nabla\times(\nabla\varphi)=0$.

4) יהיו $\mathbf{F}(x,y,z), \mathbf{G}(x,y,z)$ שדות וקטורים כלליים

הוכיחו כי $\mathbf{curl}(\mathbf{F}+\mathbf{G})=\mathbf{curl}(\mathbf{F})+\mathbf{curl}(\mathbf{G})$.

5) יהי $\mathbf{F}(x,y,z)$ שדה וקטורי.

הוכיחו כי $\nabla\times(\nabla\times\mathbf{F})=-\nabla^2\mathbf{F}+\nabla(\nabla\cdot\mathbf{F})$.

* בעמוד הבא סיכום הנוסחאות של גרדיאנט דיברגנץ ורוטור.

לתשובות מלאות בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

הגדרה (גרדיאנט של פונקציה)

נתונה פונקציה סקלרית $\varphi=\varphi(x,y,z)$.

הגרדיאנט של φ המסומן $\text{grad}\varphi$ מוגדר על ידי $\text{grad}\varphi=\nabla\varphi=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x},\frac{\partial\varphi}{\partial y},\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)$.

<u>הגדרה (דיברגנץ וקרל של שדה וקטורי)</u>

יהי $\mathbf{F}=f(x,y,z)\mathbf{i}+g(x,y,z)\mathbf{j}+h(x,y,z)\mathbf{k}$.

מגדירים את **הדיברגנץ של F** המסומן $\text{div}\mathbf{F}$, כך:

$$\text{div}\mathbf{F}=\nabla\cdot\mathbf{F}$$

$$\text{div}\mathbf{F}=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot(f,g,h)$$

$$\text{div}\mathbf{F}=f_x+g_y+h_z$$

מגדירים את **ה- curl של F** המסומן $\text{curl}\mathbf{F}$, על ידי:

$$\mathbf{curlF}=\nabla\times\mathbf{F}$$

$$\mathbf{curlF}=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)\times(f,g,h)$$

$$\mathbf{curlF}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\ \frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\ f&g&h\end{vmatrix}$$

$$\mathbf{curlF}=\mathbf{i}\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\ g&h\end{vmatrix}-\mathbf{j}\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial z}\\ f&h\end{vmatrix}+\mathbf{k}\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}\\ f&g\end{vmatrix}$$

$$\mathbf{curlF}=(h_y-g_z)\mathbf{i}+(f_z-h_x)\mathbf{j}+(g_x-f_y)\mathbf{k}$$

הערה: יש הרושמים $\text{rot}\mathbf{F}$ במקום $\text{curl}\mathbf{F}$.